Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: J. Houštěk (2), M. Jarešová a P. Šedivý (1,3), B. Vybíral (4)

1. a) Těžiště T_1 dna nádoby leží ve výšce $y_1 = 0$, těžiště pláště T_2 je ve výšce $y_2 = r$. Platí

$$\frac{|T_1T_\mathrm{n}|}{|T_2T_\mathrm{n}|} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2\pi r\cdot 2r}{\pi r^2} = \frac{4}{1}\,,$$

kde $m_1,\ m_2,\ S_1,\ S_2$ jsou hmotnosti a plošné obsahy podstavy a pláště. Z toho

$$|T_1T_\mathrm{n}| = y_\mathrm{n} = \frac{4}{5}r\,.$$

2 body

b) Platí:

$$y_\mathrm{t} = \frac{my_\mathrm{n} + m_\mathrm{v}y_\mathrm{v}}{m + m_\mathrm{v}}\,,$$

kde $m_\mathrm{v} = \varrho\pi r^2 v$ je hmotnost vody a $y_\mathrm{v} = v/2$ je výška těžiště vody. Po dosazení dostáváme

$$y_\mathrm{t} = \frac{\dfrac{4mr}{5} + \dfrac{\varrho\pi r^2v^2}{2}}{m + \varrho\pi r^2 v}\,. \tag{1}$$

2 body

c) Minimum funkce (1) nalezneme řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{t}}{\mathrm{d}v} = \frac{\varrho\pi r^2 v(m + \varrho\pi r^2 v) - \left(\dfrac{4mr}{5} + \dfrac{\varrho\pi r^2 v^2}{2}\right)\varrho\pi r^2}{(m + \varrho\pi r^2 v)^2} = 0\,.$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici s neznámou v; úloze vyhovuje její kladný kořen:

$$\frac{\varrho\pi r^2 v^2}{2} + mv - \frac{4mr}{5} = 0\,,\qquad v = \frac{-\,m + \sqrt{m^2 + \dfrac{8\varrho\pi r^3 m}{5}}}{\varrho\pi r^2}\,.$$

3 body

Pro dané hodnoty $v = 0{,}0194$ m. **1 bod**

Je-li výška těžiště v určitém okamžiku minimální, pak přilitím velmi malého množství vody se tato výška nezmění. To znamená, že přilitá voda se bude nacházet ve výšce těžiště. Těžiště je tedy v daném okamžiku uprostřed hladiny a

$$y_\mathrm{t} = v = 0{,}0194 \text{ m}.$$

2 body

2. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v rovnovážné poloze desky, osu y orientujeme svisle vzhůru. Pohyb desky popisují kinematické zákony

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$

Dokud se zrníčko pohybuje s deskou, působí na něj kromě tíhové síly reakce desky F_d a platí

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{d} + \boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}\,, \qquad F_\mathrm{d} - mg = ma\,, \qquad F_\mathrm{d} = mg + ma = m(g - \omega^2 y)\,.$$

Při pohybu vzhůru se reakce desky zmenšuje. V okamžiku, kdy je nulová, zrníčko opustí desku a pak na něj působí jen síla tíhová, která mu uděluje tíhové zrychlení. Zrníčko se tedy od desky oddělí v okamžiku, kdy zrychlení desky je rovno tíhovému zrychlení ($a = -\omega^2 y = -g$). Aby k nadskakování došlo, musí být amplituda zrychlení větší než g, tedy

$$\omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A > g$$

2 body

b) Z podmínky $-\omega^2 y = -g$ plyne pro okamžitou výchylku v okamžiku opuštění desky

$$y = \frac{g}{4\pi^2 f^2}\,.$$

Z kinematických zákonů harmonického pohybu plyne

$$y^2 + (v/\omega)^2 = A^2\,. \qquad \text{Z toho} \qquad v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}\,.$$

V okamžiku opuštění desky

$$v = \omega\sqrt{A^2 - \frac{g^2}{\omega^4}} = \sqrt{4\pi^2 f^2 A^2 - \frac{g^2}{4\pi^2 f^2}}\,.$$

3 body

c) Výšku výstupu zrníčka určíme pomocí zákona zachování energie:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy\,,$$

$$h = \frac{v^2}{2g} + y = \frac{4\pi^2 f^2 A^2 - \dfrac{g^2}{4\pi^2 f^2}}{2g} + \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{2\pi^2 f^2 A^2}{g} + \frac{g}{8\pi^2 f^2}\,.$$

2 body

d) Ze vzorce pro h vyjádříme A:

$$A = \frac{1}{4\pi^2 f^2}\sqrt{8\pi^2 f^2 hg - g^2} = 0{,}623\ \mathrm{mm}\,.$$

Zbývající číselné výsledky jsou: $y = 0{,}099\ \mathrm{mm}\,, \quad v = 0{,}19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$

3 body

3. a) Použijeme zobrazovací rovnici tenké čočky a vztah pro výpočet příčného zvětšení:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \qquad a' = \frac{af}{a-f} = 2f = 100\ \mathrm{mm}\,, \qquad Z = -\frac{f}{a-f} = -1\,.$$

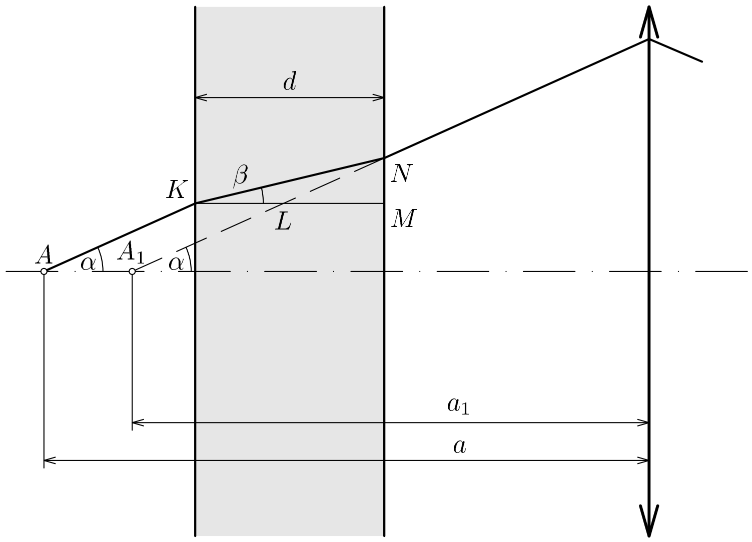
Obraz leží ve vzdálenosti $2f = 100$ mm od středu čočky, je převrácený a stejně velký jako předmět. **1 bod**

b) Paprsky vycházející z bodu A na optické ose se při průchodu planparalelní deskou posunou, jako by vycházely z bodu A_1, jehož polohu určíme podle obr. R1. Platí

$$|AA_1| = |KL| = |KM| - |LM| = d - \frac{|MN|}{\operatorname{tg}\alpha} = d - \frac{d\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Pro malé úhly

$$|AA_1| \approx d - \frac{d\sin\beta}{\sin\alpha} = d - \frac{d}{n} = 10\ \mathrm{mm}\,.$$



Obr. R1

Stejně se chovají i paprsky vycházející z bodů předmětu, které neleží na optické ose. Účinek skleněné desky je tedy takový, jako kdybychom předmět přemístili do vzdálenosti $a_1 = a - d(1 - 1/n) = 90$ mm od středu čočky. Obraz vytvořený čočkou se přemístí do vzdálenosti a_1' a bude mít příčné zvětšení Z_1:

$$a_1' = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = 111\ \mathrm{mm}\,, \qquad Z_1 = -\frac{f}{a_1 - f} = -1{,}25\,.$$

5 bodů

c) Přemístíme-li desku mezi čočku a obraz, jehož polohu a příčné zvětšení jsme vypočítali v úkolu a), paprsky se při průchodu deskou opět posunou o $d - d/n = 10$ mm, tentokrát ale od čočky. Proto se i obraz vytvořený čočkou posune do vzdálenosti $a' + d - d/n = 110$ mm od středu čočky, ale jeho příčné zvětšení $Z = -1$ se tím nezmění. **4 body**

4. a) Ze zákona celkového proudu je zřejmé, že když oběma cívkami bude procházet proud souhlasného směru, bude magnetické pole intenzivnější a síly, kterými se vzájemně přitahují obě půlky jádra, budou větší. Proto v případě síly

F_1 musí být spojeny svorky 2–3, 1–5,

F_2 musí být spojeny svorky 1–3, 2–5.

2 body

b) Nejprve určíme proud procházející cívkami. Cívka „b“ má odpor

$$R_\mathrm{b} = R_\mathrm{a}\frac{z_\mathrm{b}}{z_\mathrm{a}} = 3{,}60\ \Omega\,.$$

Celkový odpor je $R_\mathrm{a} + R_\mathrm{b} = 6{,}00\ \Omega$ a cívkami prochází proud $I = 1{,}00$ A.
Pro nosnou sílu elektromagnetu platí v případě nulové vzduchové mezery ($\delta = 0$) vzorec (51) ve studijním textu:

$$F = \mu_0 S\left(\frac{\mu_\mathrm{r} z I}{l}\right)^2, \quad \text{kde} \quad S = \pi r^2, \quad l = 2\pi r_0\,,$$

$$z = z_\mathrm{a} + z_\mathrm{b} \text{ pro sílu } F_1, \quad z = z_\mathrm{b} - z_\mathrm{a} \text{ pro sílu } F_2\,.$$

Pak

$$\mu_{\mathrm{r}1} = \frac{2}{(z_\mathrm{a} + z_\mathrm{b})I}\,\frac{r_0}{r}\sqrt{\frac{\pi F_1}{\mu_0}} = 1500\,, \qquad \mu_{\mathrm{r}2} = \mu_{\mathrm{r}_1}\frac{z_\mathrm{a} + z_\mathrm{b}}{z_\mathrm{b} - z_\mathrm{a}}\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = 2625\,.$$

4 body

c) Energii elektromagnetu E_mg určíme užitím její hustoty:

$$E_\mathrm{mg} = w_\mathrm{mg} V = \frac{1}{2}BH\cdot V = \frac{1}{2}\mu H^2 S l\,.$$

Intenzitu H určíme ze zákona celkového proudu:

$$2\pi r_0 H = zI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{zI}{2\pi r_0}\,.$$

Pak

$$E_\mathrm{mg} = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r} z^2 I^2 r^2}{4 r_0} = \frac{zIr}{2}\sqrt{\pi\mu_0 F}\,.$$

(Akceptovatelná jsou obě vyjádření.)

$$E_{mg1} = \frac{(z_\mathrm{a} + z_\mathrm{b})Ir}{2}\sqrt{\pi\mu_0 F_1} = 0{,}109\ \mathrm{J}\,,$$

$$E_{\mathrm{mg}2} = E_{\mathrm{mg}1}\frac{z_\mathrm{b} - z_\mathrm{a}}{z_\mathrm{a} + z_\mathrm{b}}\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = 7{,}60\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}\,.$$

4 body