Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

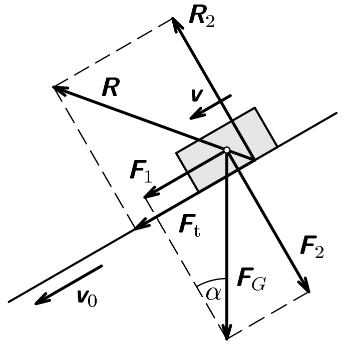
Autoři úloh: R. Horáková (1,2,5), J. Houštěk (3), J. Thomas (4),
P. Šedivý (6), I. Volf (7)

1. Po přestřižení motouzu působí na cihlu jen tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce pásu $\boldsymbol{R}$ (obr. R1). Jejich složky $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{R}_2$ kolmé k pásu mají stejnou velikost

$$F_2 = R_2 = F_G \cos\alpha$$

a navzájem se ruší. Ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ působí pás na cihlu třecí silou F_t, která se skládá s pohybovou složkou tíhové síly $\boldsymbol{F}_1$ ve výslednici o velikosti

$$F = F_1 + F_\mathrm{t} = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,.$$



Obr. R1

Ta uděluje cihle zrychlení o velikosti $a = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, dokud nedosáhne rychlosti pásu $\boldsymbol{v}_0$. K tomu potřebuje dobu a dráhu

$$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\,, \qquad s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

A. Pokud $s_0 \geq l\,,$ $\left(f \leq \dfrac{v_0^2 - 2gl\sin\alpha}{2gl\cos\alpha}\right)$ dorazí cihla na konec pásu za dobu

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}} \quad \text{rychlostí} \quad v = \sqrt{2la} = \sqrt{2lg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

2 body

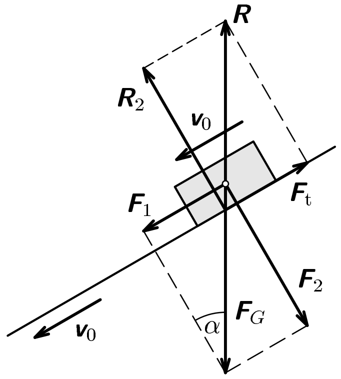
B. Jestliže $s_0 < l,$ $\left(f > \dfrac{v_0^2 - 2gl\sin\alpha}{2gl\cos\alpha}\right)$ závisí další pohyb cihly na velikosti součinitele smykového tření.

B1. Pokud

$$fmg\cos\alpha \geq mg\sin\alpha\,, \qquad (f \geq \operatorname{tg}\alpha)$$

pohybuje se cihla rovnoměrně rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a síly, které na ni působí, se ve svém účinku ruší (obr. R2). Cihla dorazí na konec pásu za dobu

$$t = t_0 + \frac{l - s_0}{v_0}\,. \qquad \textbf{2 body}$$



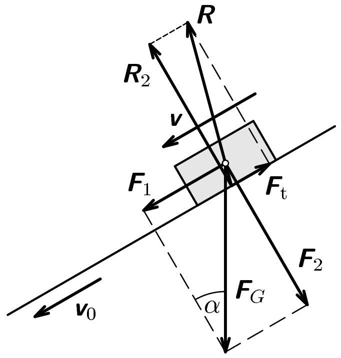
Obr. R2

B1. Pokud

$$fmg\cos\alpha < mg\sin\alpha\,, \quad (f < \operatorname{tg}\alpha)$$

nastane situace podle obr. R3. Třecí síla nevykompenzuje úplně pohybovou složku tíhové síly a na cihlu působí výsledná síla o velikosti $F = F_1 - F_t$. Cihla koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,.$$



Obr. R3

Dobu t' po dosažení rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ určíme řešením kvadratické rovnice

$$l - s_0 = v_0 t' + \frac{1}{2}a' t'^2\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $t' = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a'(l - s_0)}}{a'}$.

Celková doba pohybu cihly a její konečná rychlost budou

$$t = t_0 + t'\,, \qquad v = v_0 + a't'\,.$$

2 body

Číselné řešení:

Pro $f_1 = 0{,}70$ nastane případ B1.

$a = 10{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $t_0 = 0{,}277\ \mathrm{s}$, $s_0 = 0{,}415\ \mathrm{m}$.

Cihla dorazí na konec pásu za dobu $t = 1{,}14$ s rychlostí $v = v_0 = 3{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Pro $f_2 = 0{,}40$ nastane případ B2.

$a = 8{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $t_0 = 0{,}362\ \mathrm{s}$, $s_0 = 0{,}543\ \mathrm{m}$, $a' = 1{,}51\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $t' = 0{,}697\ \mathrm{s}$.

Cihla dorazí na konec pásu za dobu $t = 1{,}06$ s rychlostí $v = 4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body

2. Označení veličin:

perioda kmitů .... T
průměr vyčnívající trubice .... d
hmotnost hustoměru .... m
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_1 = 997\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ .... V_1
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_2 = 900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ .... V_2
objem ponořené části v kapalině o hustotě $\varrho_3 = 1\,100\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ .. V_3
délka stupnice l

a) V rovnovážné poloze mají vztlaková síla a tíhová síla stejnou velikost. Jestliže okamžitá výchylka hustoměru ve svislém směru je y, rovnováha se poruší. Můžeme-li zanedbat odpor kapaliny proti pohybu, má výsledná síla stejnou velikost jako změna vztlakové síly a opačný směr než výchylka. Její svislá souřadnice je

$$F = \Delta F_\mathrm{v} = -\frac{\pi d^2 \varrho_1 g y}{4} = -ky\,.$$

Konstanta $k = S\varrho_1 g$ má podobný význam jako tuhost pružiny u pružinového oscilátoru. Jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonických kmitů s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{\pi d^2 \varrho_1 g}} = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\varrho_1 g}}\,.$$

4 body

b) Úpravou předcházejícího vztahu dostaneme:

$$m = \frac{T^2 d^2 \varrho_1 g}{16\pi}\,, \qquad V_1 = \frac{m}{\varrho_1} = \frac{T^2 d^2 g}{16\pi} \doteq 2{,}47\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 \doteq 25\ \mathrm{cm}^3\,.$$

3 body

c) Platí: $m = V_1\varrho_1 = V_2\varrho_2 = V_3\varrho_3$. Z toho

$$V_2 = V_1\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,, \qquad V_3 = V_1\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\,,$$

$$V_2 - V_3 = \frac{\pi d^2 l}{4} = V_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right) = \frac{T^2 d^2 g}{16\pi}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)\,,$$

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right) = 0{,}253\ \mathrm{m} \doteq 25\ \mathrm{cm}\,.$$

3 body

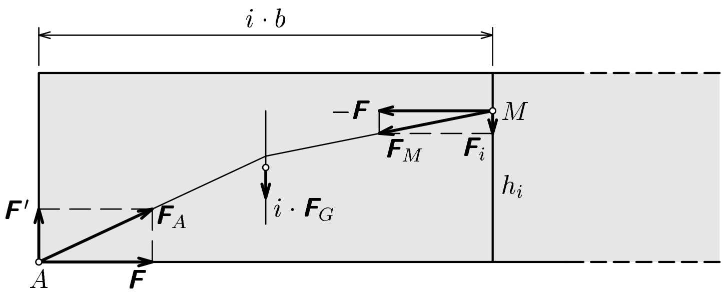
3. Pro celou řadu krychliček i pro každou její část platí podmínky rovnováhy:

1. Vektorový součet sil působících na těleso musí být nulový.
2. Součet momentů sil působících na těleso musí být nulový vzhledem k libovolné ose.

a) Na celou řadu krychliček působí ve svislém směru celková tíhová síla $n \cdot \boldsymbol{F}_G$ a dvě síly $\boldsymbol{F}'$ v bodech A a B. Aby nastala rovnováha, musí být

$$F' = \frac{n}{2} F_G = \frac{n b^3 \varrho g}{2} = 4{,}7\ \mathrm{N}\,.$$ **1 bod**

V dalším řešení vyjdeme z obr. R4. Na prvních i krychliček se můžeme dívat jako na jediné tuhé těleso, na které působí tíhová síla $i \cdot \boldsymbol{F}_G$, vnější síla $\boldsymbol{F}_A$ v bodě A a síla $\boldsymbol{F}_M$ od $(i+1)$-té krychličky, jejíž působiště leží v bodě M ve výšce h_i.



Obr. R4

b) Vodorovné složky sil působících v bodech A a M se ve svém účinku ruší, jsou proto stejně velké a opačného směru. Každé dvě sousední krychličky na sebe tedy působí ve vodorovném směru silami $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$, stejně velkými jako vodorovná složka síly $\boldsymbol{F}_A$. **1 bod**

c) Z rovnováhy svislých sil na obr. R4 plyne:

$$F' = iF_G + F_i\,, \qquad F_i = F' - iF_G = \left(\frac{n}{2} - i\right) F_G\,.$$

Kladné znaménko přitom značí směr dolů, záporné směr nahoru. Podle tohoto vztahu působí největší síla o velikosti $\left(\frac{n}{2} - 1\right) F_G$ mezi první a druhou krychličkou a mezi poslední a předposlední krychličkou. Zde tedy nejsnáze dojde k proklouznutí. Pro velikost síly $\boldsymbol{F}$ musí platit

$$f_0 F \geq \left(\frac{n}{2} - 1\right) F_G\,, \qquad F \geq \frac{n-2}{2f_0} b^3 \varrho g = 6{,}5\ \mathrm{N}\,.$$ **3 body**

d) Zvolme osu v bodě A. Podle momentové věty

$$F h_i = i F_G \frac{ib}{2} + F_i \cdot ib = F_G \left(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} \right) ib \,, \qquad h_i = \frac{F_G b}{2F} (n-i) i \,.$$

Pro sudé n, což je náš případ, je výška zřejmě největší pro $i = n/2$. Pak je

$$h_{\max} = \frac{b n^2 F_G}{8F} \,.$$ **3 body**

e) Řada se nejsnáze zlomí uprostřed. Aby k tomu nedošlo, musí platit

$$h_{\max} \leq b \,, \quad \text{z toho} \quad F \geq \frac{n^2}{8} \mathrm{F}_G = \frac{n^2}{8} b^3 \varrho g = 23{,}5\ \mathrm{N}$$ **2 body**

Toto je v našem případě silnější podmínka než v c). Při postupném zmenšování složky $\boldsymbol{F}$ tedy dojde ke zlomení řady. Pro krychličky z nějakého kluzkého materiálu by tomu ale mohlo být naopak.

4. a) Pro určení polohy těžiště zvolíme vztažnou soustavu podle obr. R5. Těleso můžeme považovat za spojení dvou kvádrů o hmotnostech

$$m_1 = 5m_0\,, \qquad m_2 = 2m_0\,,$$

kde m_0 je hmotnost jedné krychličky, a těžištích

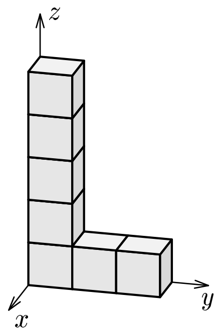
$$T_1 = \left[\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{5b}{2}\right]\,, \qquad T_2 = \left[\frac{b}{2}, 2b, \frac{b}{2}\right]\,.$$

Těžiště celého tělesa má souřadnice

$$x_T = \frac{b}{2} = 20\ \mathrm{mm}\,,$$

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{7m_0} = \frac{13}{14} b = 37{,}1\ \mathrm{mm}\,,$$

$$z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{7m_0} = \frac{27}{14} b = 7{,}1\ \mathrm{mm}\,.$$



Obr. R5

2 body

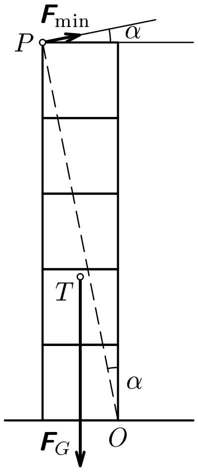
b) Nejsnáze povalíme těleso na bok silou působící na horní hranu nejvyšší krychličky podle obr. R6. Z momentové věty plyne

$$F_{\min}\sqrt{(5b)^2 + b^2} = F_G \frac{b}{2}\,,$$

$$F_{\min} = \frac{F_G}{2\sqrt{26}} = \frac{7b^3 \varrho g}{2\sqrt{26}} = 0{,}323\ \mathrm{N}\,.$$

Síla musí působit šikmo vzhůru.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{5b} = 0{,}2\,, \qquad \alpha = 11{,}3^\circ\,.$$



Obr. R6

2 body

Úlohy c) až e) vyřešíme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s automobilem. Ve všech třech případech na těleso působí setrvačná síla, jejíž působiště je v těžišti. Moment M_s setrvačné síly vzhledem k podstavné hraně, okolo které by mělo dojít k překlopení, musí překročit moment M tíhové síly vzhledem k téže ose, ale velikost setrvačné síly F_s musí zůstat menší než velikost maximální třecí síly, která může vzniknout mezi tělesem a podlahou automobilu $F_{\mathrm{tmax}} = f_0 mg = 0{,}70mg$.

c) Při rozjíždění je $M_\mathrm{s} = M$, jestliže

$$ma \cdot z_T = mg \cdot y_T\,, \qquad a = g\frac{y_T}{z_T} = g\frac{13}{27} = 4{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Přitom $F_s = 0{,}48mg < f_0mg$. Překročíme-li zrychlení $4{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, skácí se těleso dozadu.

2 body

d) Na kruhovém objezdu o poloměru r působí na těleso setrvačná odstředivá síla. Rovnost $M_\mathrm{s} = M$ nastane, jestliže

$$\frac{mv^2}{r}z_T = mgx_T\,, \qquad v^2 = \frac{grx_T}{z_T} = \frac{7}{27}gr\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{7}{27}gr} = 7{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 26\ \mathrm{km/h}\,.$$

2 body

e) Při brzdění dosáhneme rovnosti $M_\mathrm{s} = M$, jestliže

$$ma'z_T = mg(3b - y_T)\,, \qquad a' = \frac{3b - y_T}{z_T}g = \frac{29}{27}g = 10{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

V takovém případě $F_s = \frac{29}{27}mg > f_0mg$.

Těleso se neskácí, ale začne klouzat dopředu, jakmile velikost zrychlení překročí hodnotu $f_0g = 6{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2 body

5.a) $$p_2 = p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 4{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,, \quad T_3 = T_4 = T_1 \frac{V_3}{V_2} = 2{,}8 T_1 = 840\ \mathrm{K}\,,$$

$$p_4 = \frac{p_3 V_3}{V_4} = 2{,}80 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,,$$

$$U_1 = U_2 = 2{,}5 n R_\mathrm{m} T_1 = 2{,}5 p_1 V_1 = 2{,}5\ \mathrm{kJ}\,, \qquad U_3 = U_4 = U_1 \frac{T_3}{T_1} = 7{,}0\ \mathrm{kJ}\,.$$

3 body

b) Plyn koná práci, jestliže se rozpíná, tedy v úsecích 2-3 a 3-4.
Plyn odevzdává teplo do okolí při ději 1-2, kdy spotřebovává práci a jeho vnitřní energie se přitom nemění.

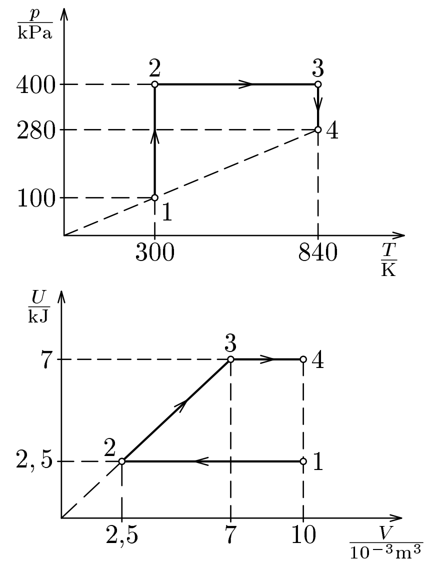
$$Q'_{12} = W_{12} = n R_\mathrm{m} T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \doteq 1{,}4\ \mathrm{kJ}\,,$$

$$W'_{23} = p_2 (V_3 - V_2) = p_2 \cdot 0{,}45 V_1 = 1{,}8\ \mathrm{kJ}\,,$$

$$W'_{34} = Q_{34} = n R_\mathrm{m} T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \doteq 1{,}0\ \mathrm{kJ}\,,$$

3 body

c)



4 body

7. a) Vzdálenost r_v Venuše od Slunce určíme z trojúhelníku SZV na obr. R7:

$$r_\mathrm{v} = r_\mathrm{z} \sin\alpha = 0{,}7234\ \mathrm{AU} = 108{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$ **1 bod**

b) Úhlová rychlost Venuše podle pozorovatele na Zemi je $\omega_\mathrm{syn} = \omega_\mathrm{v} - \omega_\mathrm{z}$, z čehož po substituci $\omega = 2\pi/T$ a úpravě dostaneme

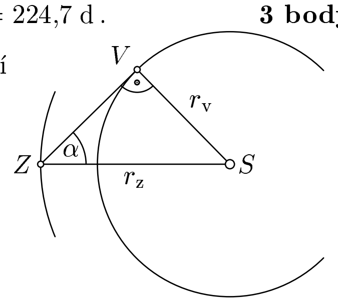
$$T_\mathrm{v} = \frac{T_\mathrm{syn} T_\mathrm{z}}{T_\mathrm{syn} + T_\mathrm{z}} = 0{,}6152\ \mathrm{roku} = 224{,}7\ \mathrm{d}\,.$$ **3 body**

c) Pro dostředivou sílu působící na planetu platí

$$F_d = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \varkappa \frac{Mm}{r^2}\,.$$

Z toho úpravou dostaneme pro obě planety:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} \doteq 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\,.$$



Obr. R7

2 body

d) Platnost 3. Keplerova zákona ověříme porovnáním:

$$\frac{r_\mathrm{v}^3}{T_\mathrm{v}^2} = \frac{r_\mathrm{z}^3}{T_\mathrm{z}^2} \doteq 3{,}4 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m^3 \cdot s^2}$$ **1 bod**

e) Velká poloosa eliptické dráhy sondy má délku

$$a = \frac{r_\mathrm{v} + r_\mathrm{z}}{2} = 128{,}9 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

Z 3. Keplerova zákona odvodíme: $T_\mathrm{sondy} = T_\mathrm{z}\sqrt{\dfrac{a^3}{r_\mathrm{z}^3}} = 292\ \mathrm{d}$

a doba přiblížení sondy k Venuši je

$$t = \frac{T_\mathrm{sondy}}{2} = 146\ \mathrm{d}\,.$$ **2 body**

f) Zorné úhly Slunce vzhledem k Zemi a vzhledem k Venuši jsou

$$\alpha_\mathrm{z} = \frac{2R}{r_\mathrm{z}}\,, \quad \alpha_\mathrm{v} = \frac{2R}{r_\mathrm{v}}\,.$$

Po úpravě $$\alpha_\mathrm{v} = \alpha_\mathrm{z}\frac{r_\mathrm{z}}{r_\mathrm{v}} = 44{,}2'\,.$$ **1 bod**