Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Randa (2, 3) a P. Šedivý (1, 4)

1.a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R1 s počátkem ve středu tunelu, jehož vzdálenost od středu Měsíce je r_0. Gravitační síla působící na vlak se rozkládá na tečnou složku $\boldsymbol{F}_1$ působící ve směru tunelu a normálovou složku $\boldsymbol{F}_2$ kolmou k tunelu. Z podobnosti trojúhelníků a vztahu (1) určíme jejich velikosti:

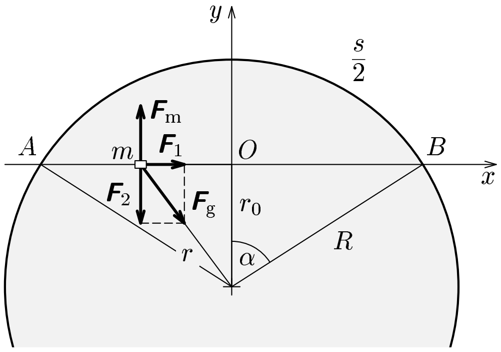
$$\frac{F_1}{F_g} = \frac{|x|}{r}, \quad F_1 = \frac{mg}{R}|x|, \qquad \frac{F_2}{F_g} = \frac{r_0}{r}, \quad F_2 = \frac{mg}{R}r_0 .$$

Normálová složka gravitační síly $\boldsymbol{F}_2$ je v rovnováze s magnetickou silou $\boldsymbol{F}_m$. Výsledná tečná složka $\boldsymbol{F}_1$ je přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy ve středu tunelu a má opačný směr. Jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonického pohybu. Jízda ze stanice A do stanice B představuje polovinu kmitu. Platí

$$ma_x = -m\omega^2 x = -\frac{mg}{R}x, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Doba jízdy zřejmě nezávisí na vzdálenosti stanic a pro dané hodnoty je

$$\frac{T}{2} = 3\,256\ \mathrm{s} \doteq 54\ \mathrm{min} .$$



Obr. R1 **4 body**

b) Nejprve určíme středový úhel $\alpha = \dfrac{s}{2R} = 0{,}575\ \mathrm{rad}$. Počáteční zrychlení má velikost

$$a_0 = \frac{F_{g0}\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 0{,}88\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Rychlost při průchodu rovnovážnou polohou má velikost

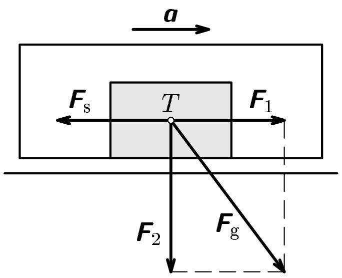
$$v_{\mathrm{m}} = x_{\mathrm{m}}\omega = R\sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} = \sin\alpha \cdot \sqrt{Rg} = 913\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Tíhu dopravovaného tělesa určíme nejlépe v neinerciální vztažné soustavě spojené s vlakem (obr. R2). Na těleso působí vedle gravitační síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ síla setrvačná $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}} = -m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{F}_1$. Výslednice sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ je tlaková složka gravitační síly $\boldsymbol{F}_2$, která je v rovnováze s reakcí podlahy. Tíha dopravovaného tělesa v okamžiku rozjezdu poklesne na

$$G = F_2 = mg\frac{r_0}{R} = mg\cos\alpha = 0{,}84mg$$

a během jízdy se nemění.



Obr. R2

3 body

2.a) Podle stavové rovnice platí $p_1V_1 = p_4V_4 = nRT_1$, $p_3V_2 = p_3V_3 = nRT_2$.
Z obrázku je zřejmé: $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{V_2}{V_1}$, $\dfrac{p_3}{p_4} = \dfrac{V_3}{V_4}$.
Porovnáním vztahů dostaneme

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 , \qquad V_1 = V_2\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} ,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_3V_3}{p_4V_4} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^2 , \qquad V_3 = V_4\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = V_2\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} .$$

3 body

b) $\boxed{1 \to 2:}$
Vykonanou práci určíme z p-V diagramu jako obsah lichoběžníka (obr. R3).

$$W'_{12} = \frac{p_2 + p_1}{2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_2V_2 + p_1V_2 - p_2V_1 - p_1V_1) .$$

Současně platí $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{V_2}{V_1}$, $\longrightarrow$ $p_1V_2 - p_2V_1 = 0$.

$$W'_{12} = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) .$$

$\boxed{2 \to 3:}$ $W'_{23} = \dfrac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \dfrac{1}{2}(p_2V_3 + p_3V_3 - p_2V_2 - p_3V_2)$.
Současně platí

$$p_2V_2 = p_3V_3 , \quad \longrightarrow \quad p_2V_2 - p_3V_3 = 0 , \quad p_3 = p_2\frac{V_2}{V_3} = p_2\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} .$$

$$W'_{23} = \frac{1}{2}(p_2V_3 - p_3V_2) = \frac{1}{2}p_2V_2\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) ,$$

$\boxed{3 \to 4:}$
Spotřebovanou práci určíme z p-V diagramu jako obsah lichoběžníka.

$$W_{34} = \frac{p_3 + p_4}{2}(V_3 - V_4) = \frac{1}{2}(p_3V_3 + p_4V_3 - p_3V_4 - p_4V_4) .$$

Současně platí $\dfrac{p_3}{p_4} = \dfrac{V_3}{V_4}$, $\longrightarrow$ $p_4V_3 - p_3V_4 = 0$.

$$W_{34} = \frac{1}{2}(p_3V_3 - p_4V_4) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) = W'_{12} .$$

$\boxed{4 \to 1:}$ $W_{41} = \dfrac{p_4 + p_1}{2}(V_4 - V_1) = \dfrac{1}{2}(p_4V_4 + p_1V_4 - p_4V_1 - p_1V_1)\,.$

Současně platí

$p_4V_4 = p_1V_1\,, \quad \longrightarrow \quad p_4V_4 - p_1V_1 = 0\,, \quad p_1 = p_4\dfrac{V_4}{V_1} = p_4\dfrac{V_2}{V_1} = p_4\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}\,.$

$$W_{41} = \frac{1}{2}(p_1V_4 - p_4V_1) = \frac{1}{2}p_4V_4\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right)\,.$$

4 body

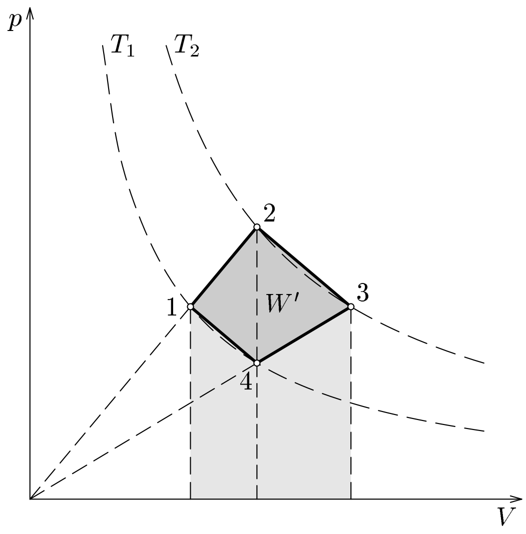
c) Celková vykonaná práce

$$W' = W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41} = W'_{23} - W_{41} =$$

$$= \frac{1}{2}nRT_2\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - \frac{1}{2}nRT_1\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) =$$

$$= \frac{nR(T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1T_2}} = 509\ \mathrm{J}\,.$$

3 body



Obr. R3.

3.a) Je-li třetí nit napnuta, působí na každou kuličku čtyři síly, které jsou v rovnováze — síla tíhová $\boldsymbol{F}_G$, síla elektrostatická $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$, síla závěsné niti F_2 a síla spojovací niti F_1 (obr. R4). Z podmínek rovnováhy plyne:

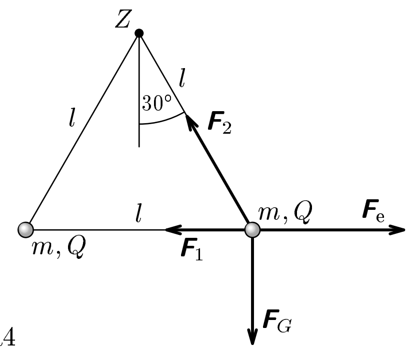
$$F_2 \cos 30° = F_G\,, \qquad F_1 + F_2 \sin 30° = F_\mathrm{e} = k\frac{Q^2}{l^2}\,,$$

kde $k \doteq 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$. Po úpravě

$$F_1 = F_\mathrm{e} - F_G \operatorname{tg} 30° = k\frac{Q^2}{l^2} - mg\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Aby spojovací nit byla napnuta, musí platit

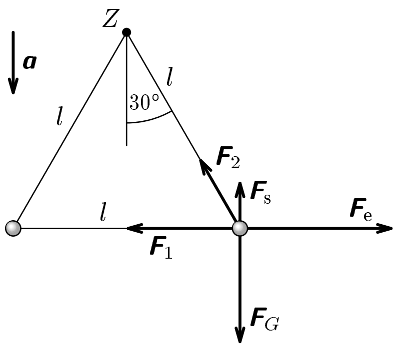
$$k\frac{Q^2}{l^2} > mg\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \qquad Q > l\sqrt{\frac{mg\sqrt{3}}{3k}}\,.$$



Obr. R4

3 body

b)

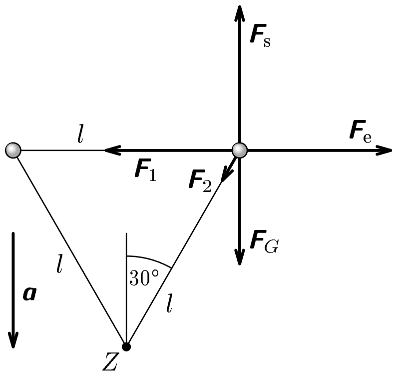


Obr. R5

V neinerciální vztažné soustavě spojené s bodem závěsu, který se pohybuje se zrychlením $\boldsymbol{a}$ orientovaným dolů, působí na kuličku setrvačná síla orientovaná proti tíhové síle. Jestliže $a < g$, nastane situace podle obr. R5 a platí

$$F_1 = k\frac{Q^2}{l^2} + m(a - g)\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

2 body



Obr. R6

Když velikost zrychlení vzroste na $a > g$, soustava se překlopí podle obr. R6 a platí

$$F_1 = k\frac{Q^2}{l^2} - m(a-g)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

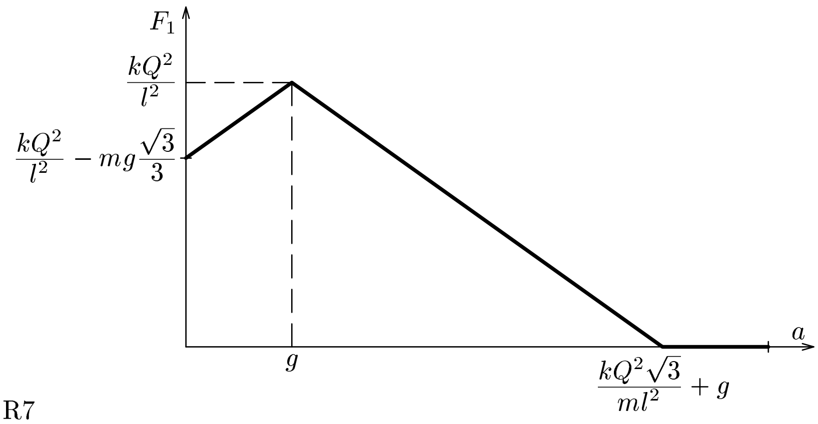
až do mezní hodnoty

$$a_\mathrm{m} = \frac{kQ^2\sqrt{3}}{ml^2} + g.$$

Pro $a \geq a_\mathrm{m}$ třetí nit přestane být napnutá a $F_1 = 0$.

2 body

Graf závislosti velikosti napínací síly na velikosti zrychlení je na obr. R7.



Obr. R7

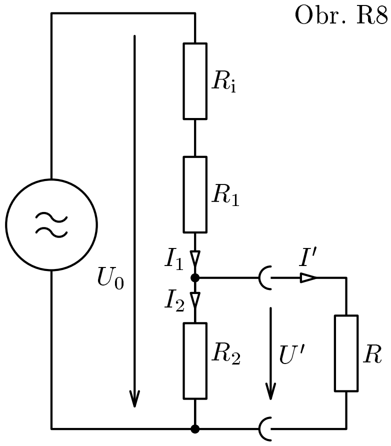
3 body

4. a) Samotný tónový generátor si můžeme představit jako sériové spojení ideálního zdroje harmonického napětí o efektivní hodnotě U_0 a vnitřního odporu R_i. Odebíráme-li z generátoru proud I, klesne jeho svorkové napětí na

$$U = U_0 - R_\mathrm{i} \cdot I\,. \qquad \text{Z toho} \quad R_\mathrm{i} = \frac{U_0 - U}{I} = 3{,}0\ \mathrm{k\Omega}\,.$$

2 body

b) Tónový generátor s děličem napětí překreslíme podle obr. R8. Označme U' napětí na výstupních svorkách děliče, jestliže z nich odebíráme proud I'. Rezistorem o odporu R_2 přitom prochází proud I_2 a generátor dodává proud I_1. Platí:



Obr. R8

$$I_2 = \frac{U'}{R_2}\,, \qquad I_1 = I' + I_2\,,$$

$$U' + I_1(R_1 + R_\mathrm{i}) = U_0\,.$$

2 body

Spojením těchto vztahů a úpravami dostaneme:

$$U' + \left(I' + \frac{U'}{R_2}\right)(R_1 + R_\mathrm{i}) = U_0\,,$$

$$U' = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_\mathrm{i}} - \frac{(R_1 + R_\mathrm{i})R_2}{R_1 + R_2 + R_\mathrm{i}} \cdot I' = U_0' - R_\mathrm{i}' I'\,.$$

Závislost svorkového napětí upraveného generátoru na odebíraném proudu je opět lineární.

3 body

c) Podle zadání

$$U_0' = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_\mathrm{i}} = 100\ \mathrm{mV}\,, \qquad R_\mathrm{i}' = \frac{(R_1 + R_\mathrm{i})R_2}{R_1 + R_2 + R_\mathrm{i}} = 75\ \Omega\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme: $\dfrac{R_\mathrm{i}'}{U_0'} = \dfrac{R_1 + R_\mathrm{i}}{U_0}$,

$$R_1 = \frac{U_0}{U_0'} R_\mathrm{i}' - R_\mathrm{i} = 4\,500\ \Omega\,, \qquad R_2 = \frac{U_0}{U_0 - U_0'} R_\mathrm{i}' = 75{,}8\ \Omega\,.$$

3 body