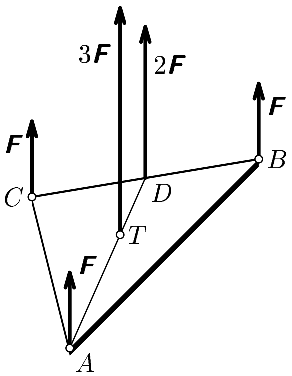
Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: P.Šedivý (1, 6), B. Vybiral (7), J. Houštěk (5), L. Zdeborová (4), úlohy 2 a 3 jsou motivovány úlohami z časopisu Kvant.

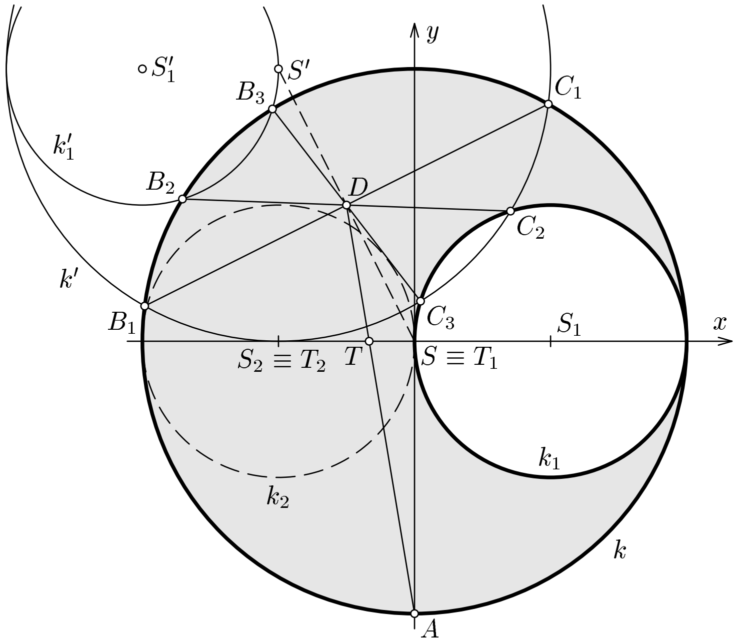
1. Působí-li podpěry umístěné v bodech A, B, C na desku stejnými silami $\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}$, můžeme síly $\boldsymbol{F}_B$ a $\boldsymbol{F}_C$ nahradit jedinou silou $\boldsymbol{F}_D = 2\boldsymbol{F}$ působící ve středu D úsečky BC (obr R1). Působiště výslednice sil $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_D$ dělí úsečku AD v poměru $2:1$. Je to těžiště trojúhelníka ABC, které musí být totožné s těžištěm desky.

Grafické řešení úlohy je na obr. R2. Kružnice k_2 rozdělí desku na dvě části o těžištích $T_1 \equiv S$ a $T_2 \equiv S_2$, jejichž plošné obsahy jsou v poměru $2:1$. Těžiště T celé desky je určeno vztahem

$$|ST| = \frac{|SS_2|}{3} = \frac{r}{6}\,.$$



Obr. R1



Obr. R2

Střed D úsečky BC leží na polopřímce AT, přičemž $|AD| = 1{,}5|AT|$. Jestliže bod B leží na kružnici k, musí bod C ležet na kružnici k' souměrně sdružené ke kružnici k podle bodu D, ale také na obvodu desky, tedy na kružnici k nebo k_1. Pokud bod C

leží na kružnici k_1, musí bod B ležet na kružnici k_1' souměrně sdružené podle bodu D. Oba body B a C nemohou současně ležet na kružnici k_1, neboť bod D leží vně kružnice a nemůže tedy být středem její tětivy.

Grafickým řešením dostáváme tři dvojice bodů B_1C_1, B_2C_2 a B_3C_3.

5 bodů

Přesnou polohu hledaných bodů určíme početně. Vztažnou soustavu zvolíme podle obr. R2. Platí:

$$D\left[-\frac{r}{4},\frac{r}{2}\right], \quad S'\left[-\frac{r}{2},r\right], \quad S_1'\left[-r,r\right],$$

$$k: \qquad x^2+y^2=r^2\,, \tag{1}$$

$$k': \qquad \left(x+\frac{r}{2}\right)^2+(y-r)^2=r^2\,, \tag{2}$$

$$k_1: \qquad \left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2, \tag{3}$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme body B_1 a C_1. Řešením soustavy rovnic (2), (3) dostaneme body C_2 a C_3. Zbývající body B_2 a B_3 můžeme určit pomocí vztahu

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB} \quad \Rightarrow \quad B=2D-C\,.$$

Po dosazení: $B_1[-0{,}992r,0{,}129r]$, $C_1[0{,}492r,0{,}871r]$, $B_2[-0{,}853r,0{,}522r]$, $C_2[0{,}353r,0{,}478r]$, $B_3[-0{,}522r,0{,}853r]$, $C_3[0{,}022r,0{,}147r]$.

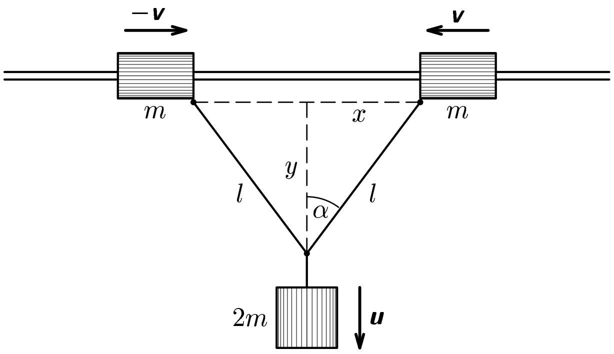
5 bodů

2. Označme rychlosti válců $\boldsymbol{v}$, $-\boldsymbol{v}$, rychlost závaží $\boldsymbol{u}$ a odchylku nitě od vertikály α (obr. R3). Protože nit má stálou délku, musí mít vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ stejně velké průměty do směru niti:

$$v \sin\alpha = u \cos\alpha\,, \qquad u = v \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{1}$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i jiným postupem:

$$v = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, \quad y = \sqrt{l^2 - x^2}\,, \quad u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{-2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{vx}{y} = v \operatorname{tg}\alpha\,.$$ **3 body**



Obr. R3

Válce jsou až do srážky působením niti neustále urychlovány. Proto budou mít jejich rychlosti největší velikost v_{m} v okamžiku srážky. Ze vztahu (1) plyne, že velikost rychlosti závaží se před dosažením dolní polohy bude spojitě zmenšovat k nule. Ze zákona zachování energie odvodíme

$$2mgl = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_{\mathrm{m}}^2\,, \qquad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{2gl}\,.$$ **3 body**

Během celého pohybu platí

$$2mgy = 2mgl\cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} 2mu^2 = mu^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = \frac{mu^2}{\sin^2\alpha}\,,$$

$$u^2 = 2gl\cos\alpha \sin^2\alpha\,.$$

Užitím diferenciálního počtu zjistíme, že výraz dosahuje maxima pro

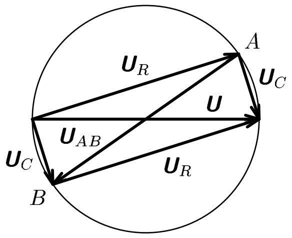
$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}\,, \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}\,, \qquad \alpha = 54{,}7^\circ$$

a maximální rychlost závaží má velikost

$$u_{\mathrm{m}} = \frac{4gl}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{gl}{3\sqrt{3}}}\,.$$ **4 body**

3. a) V sériové větvi RC je napětí na rezistoru fázově posunuto o $\pi/2$ proti napětí na kondenzátoru. Fázorový diagram celého obvodu na obr. R4 má tvar obdélníka. Proto $U_{AB} = U = 240$ V.

3 body



Obr. R4

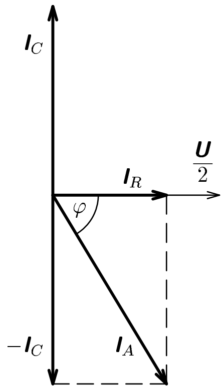
b) Ampérmetrem prakticky zkratujeme body A, B a obvod rozdělíme na dvě stejné části, na kterých bude stejné napětí $U/2$. Součástkami procházejí proudy

$$I_R = \frac{U}{2R} = 0{,}12\ \text{A}\,, \qquad I_C = \frac{U}{2X_C} = \frac{U\omega C}{2} = 0{,}377\ \text{A}\,.$$

V uzlu A se proud I_R přicházející z rezistoru dělí na proud ampérmetru I_A a proud kondenzátoru I_C. Z fázorového diagramu na obr. R5 plyne

$$\boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}_R - \boldsymbol{I}_C\,, \qquad I_A = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0{,}396\ \text{A}\,.$$

4 body



Obr. R5

c) Proud procházející ampérmetrem je fázově opožděn za síťovým napětím o úhel $\varphi = \arccos(I_R/I_A)$. Wattmetr tedy bude ukazovat výkon

$$P = UI_A \cos\varphi = UI_A \frac{I_R}{I_A} = UI_R = 28{,}8\ \text{W}\,.$$

3 body

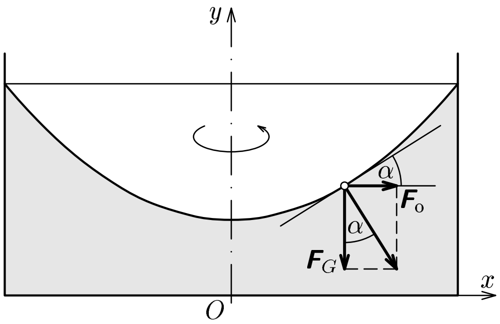
4. a) Zvolíme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou (obr. R6). Hladina je v každém bodě kolmá k výslednici sil působících na částici taveniny — síly tíhové a setrvačné síly odstředivé. Ve vzdálenosti x od osy otáčení má tečná rovina sklon

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Integrací dostaneme rovnici meridiánu rotační plochy

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g}\mathrm{d}x = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0\,,$$

což je rovnice paraboly. Její rotací vznikne rotační paraboloid.



Obr. R6

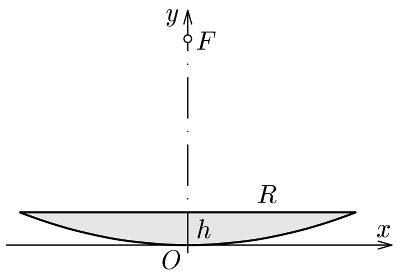
4 body

b) Přemístíme-li počátek vztažné soustavy do vrcholu paraboloidu (obr. R7), zjednoduší se rovnice meridiánu na tvar

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2\,, \qquad x^2 = \frac{2g}{\omega^2}y = 2py = 4fy\,,$$

kde p je poloparametr paraboly a f ohnisková vzdálenost. Z toho

$$\omega^2 = \frac{g}{2f}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2f}{g}} = 10{,}8\ \mathrm{s}\,.$$



Obr. R7

3 body

c) Výška parabolického vrchlíku o poloměru R je

$$h = \frac{R^2}{4f} = 0{,}292\ \mathrm{m}$$

a jeho objem $V = \int_0^h \pi x^2\,\mathrm{d}y = 4\pi f \int_0^h y\,\mathrm{d}y = 2\pi f h^2 = \dfrac{\pi R^4}{8f} = 7{,}7\ \mathrm{m}^3\,.$

3 body

5. a) Rychlost soukolí se postupně přibližuje k mezní hodnotě
$$\lim_{t\to\infty} v = C = 0{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$
Derivujeme-li vztah pro v, dostaneme zrychlení
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kC\mathrm{e}^{-kt}\,. \tag{1}$$
Směrnice tečny grafu v bodě $t = 0$ je $kC = \dfrac{C}{5\ \mathrm{s}}$. Z toho $k = 0{,}2\ \mathrm{s^{-1}}$.

2 body

b) V soukolí se indukuje napětí $U_\mathrm{i} = Blv$ orientované proti elektromotorickému napětí U_e. Obvodem prochází proud $I = \dfrac{U_\mathrm{e} - Blv}{R}$ a na soukolí působí magnetická síla $F_\mathrm{m} = BIl$, která mu uděluje zrychlení
$$a = \frac{F_\mathrm{m}}{m} = \frac{BlU_\mathrm{e}}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}v\,. \tag{2}$$

2 body

c) Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme:
$$kC\mathrm{e}^{-kt} = \frac{BlU_\mathrm{e}}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C(1 - \mathrm{e}^{-kt})\,,$$
$$kC\mathrm{e}^{-kt} = \frac{BlU_\mathrm{e}}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C + \frac{(Bl)^2}{mR}C\mathrm{e}^{-kt}\,.$$
Aby tento vztah platil, musí být $U_\mathrm{e} = BlC\,,\quad k = \dfrac{(Bl)^2}{mR}\,.$

Odtud již snadno dostáváme $B = \dfrac{U_\mathrm{e}}{Cl} = 138\ \mathrm{mT}\,,\quad R = \dfrac{U_\mathrm{e}^2}{mkC^2} = 1{,}89\ \Omega\,.$

2 body

d) Ze vztahu pro v vyjádříme t a dosadíme:
$$t_1 = \frac{1}{k}\ln\frac{C}{C - v_1} = 6{,}93\ \mathrm{s}\,.$$
1 bod Ze vztahu $F_\mathrm{m} = BIl = ma$ plyne
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{Bl}a = \frac{m}{Bl}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,,\qquad \mathrm{d}Q = \frac{m}{Bl}\mathrm{d}v\,.$$
V čase $t = 0$ je $v = 0$, $Q = 0$, Proto $Q_1 = \dfrac{m}{Bl}v_1 = \dfrac{mCv_1}{U_\mathrm{e}} = 22\ \mathrm{mC}\,.$

Ze zdroje byla odebrána energie $E_1 = U_\mathrm{e}Q_1 = mCv_1 = 240\ \mu\mathrm{J}\,.$ **2 body**

e) Kinetická energie soukolí je $E_\mathrm{k} = mv_1^2/2$, účinnost je tedy $\eta = E_k/E_1 = v_1/2C = 37{,}5\ \%$.
Zbývající část energie odebrané ze zdroje zvětšila vnitřní energii kolejnic a vozíku.

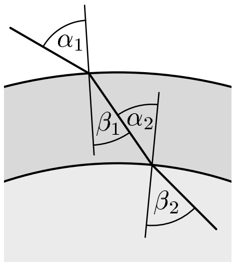
1 bod

6. Průchod paprsku stěnou válcové nádoby je znázorněn na obr. R8. Platí

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}=\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_3}{n_2}=\frac{n_3}{n_1}\,,$$

kde $n_1 \doteq 1$ je absolutní index lomu vzduchu, n_2 je absolutní index lomu materiálu stěny a $n_3 = n$ je absolutní index lomu měřené kapaliny. Je-li stěna velmi tenká, jsou kolmice dopadu prakticky rovnoběžné a platí

$$\beta_1 \doteq \alpha_2\,,\qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\doteq n\,.$$

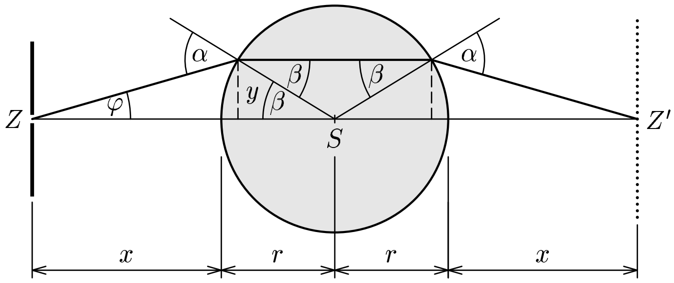


Obr. R8

Na indexu lomu materiálu stěny tedy nezáleží.

Odvození vztahu (1):

Vyjdeme z obr. R9. Platí $\quad n=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,,\qquad \alpha=\beta+\varphi\,.$



Obr. R9

Pro malé y

$$\beta\doteq\sin\beta\doteq\frac{y}{r}\,,\qquad \varphi\doteq\sin\varphi\doteq\frac{y}{x}\,,\qquad n\doteq\frac{\alpha}{\beta}\doteq\frac{\dfrac{y}{r}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{r}}=\frac{x+r}{x}\,.$$

Odvození vztahu (2):

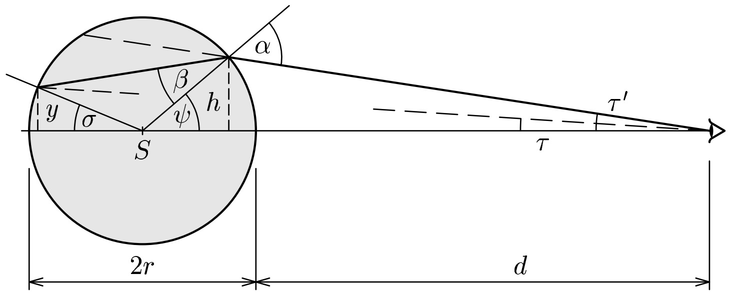
Vyjdeme z obr. R.10 Pro malé y a h platí

$$\tau'=\gamma\tau\,,\qquad h\doteq d\tau'=\gamma\tau d\doteq\frac{\gamma y d}{d+2r}\,,$$

$$\beta=\frac{\sigma+\psi}{2}\doteq\frac{y+h}{2r}\doteq\frac{y}{2r}\left(1+\frac{\gamma d}{d+2r}\right)=\frac{y}{2r}\cdot\frac{d+2r+\gamma d}{d+2r}\,,$$

$$\alpha=\psi+\tau'\doteq\frac{h}{r}+\frac{h}{d}=\frac{(d+r)h}{rd}\doteq\frac{(d+r)\gamma y d}{(d+2r)rd}=\frac{(d+r)\gamma y}{(d+2r)r}\,,$$

$$n\doteq\frac{\alpha}{\beta}\doteq\frac{2(d+r)\gamma}{2r+d+\gamma d}\,.$$



Obr. R10

7. a) 1. Pro dostředivé zrychlení protonu platí (viz studijní text – D2):

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r} = \frac{evB_\mathrm{p}}{m}\,, \quad \text{kde} \quad m = \frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Z toho $\quad B_\mathrm{p} = \dfrac{m_\mathrm{p} v}{er\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 2{,}21\ \mathrm{T} \doteq 2{,}2\ \mathrm{T}$. Při nerelativistickém řešení, kdy bereme $m = m_\mathrm{p}$, je

$$B'_\mathrm{p} = \frac{m_\mathrm{p} v}{er} = 2{,}09\ \mathrm{T} \doteq 2{,}1\ \mathrm{T}\,.$$

1 bod

2. Tok protonů představuje proud $I = \tau v$. Úsek AB (a rovněž úsek CD) vyvolá v bodě O pole o indukci (viz studijní text)

$$B_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)\,, \quad \text{kde} \quad \sin\beta_1 = \frac{4}{5}\,, \quad \sin\beta_2 = 0\,.$$

Čtvrtkruhový úsek vyvolá v bodě O magnetické pole o indukci (viz studijní text)

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{8r}\,.$$

Výsledná indukce $\boldsymbol{B}_{0\mathrm{p}}$ v bodě O má opačný směr než $\boldsymbol{B}_\mathrm{p}$ a velikost

$$B_{0\mathrm{p}} = 2B_l + B_r = \frac{\mu_0 \tau v}{r}\left(\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8}\right) = 1{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T}.$$

$$\frac{B_{0\mathrm{p}}}{B_\mathrm{p}} = \frac{\mu_0 \tau e}{m_\mathrm{p}}\left(\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 6{,}0 \cdot 10^{-10}.$$

Při nerelativistickém řešení je $\quad \dfrac{B_{0\mathrm{p}}}{B_\mathrm{p}} = \dfrac{\mu_0 \tau e}{m_\mathrm{p}}\left(\dfrac{2}{5\pi} + \dfrac{1}{8}\right) = 6{,}1 \cdot 10^{-10}$.

Indukce $\boldsymbol{B}_{0p}$ je ve srovnání s $\boldsymbol{B}_\mathrm{p}$ zanedbatelná. **3 body**

3. Celková délka trajektorie a celkový náboj na ní jsou

$$L = 2l + \frac{\pi r}{2} = r\left(\frac{8}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad Q = L\tau\,.$$

Z toho určíme počet protonů $\;n_\mathrm{p} = \dfrac{\tau L}{e} = \dfrac{\tau r}{e}\left(\dfrac{8}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Relativistická kinetická energie všech protonů je

$$E_\mathrm{p} = n_\mathrm{p} E_{1\mathrm{p}} = \frac{\tau r}{e}\left(\frac{8}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot m_\mathrm{p} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) =$$

$$= 2{,}4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J} = 1{,}5\cdot 10^{16}\ \mathrm{eV}\,.$$ **3 body**

b) 1. Protože náboj jedné částice α je $2e$ a hmotnost $m_\alpha \doteq 4m_\mathrm{p}$, je
$$B_\alpha \doteq 2B_\mathrm{p} = 4{,}4\ \mathrm{T}.$$
2. Protože počet částic je stejný a jedna částice α má náboj $2e$, je délková hustota náboje $\tau_\alpha = 2\tau$ a $B_{0\alpha} = 2B_{0\mathrm{p}} = 2{,}5\cdot 10^{-9}$ T, a tedy
$$B_{0\alpha}/B_\alpha = B_{0\mathrm{p}}/B_\mathrm{p}.$$
3. Protože hmotnost $m_\alpha \doteq 4m_\mathrm{p}$ a počet částic i jejich rychlosti jsou stejné, je celková kinetická energie $E_\alpha = 4E_\mathrm{p} = 9{,}7\cdot 10^{-3}$ J.

3 body