Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1,2,3,4,6,7), I. Volf (5)

1.a) Zrychlení vlaku při brzdění označme $\boldsymbol{a}_1$. Z rovnic

$$v_0 = a_1 t_1 , \qquad s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \tag{1}$$

plyne $$v_0 = \frac{2s_1}{t_1} = 20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} .$$ **1 bod**

b) Z rovnic (1) a z rovnice $v_0 = a_2 t_2$ plyne

$$a_2 = a_1 \frac{t_1}{t_2} = \frac{2s}{t_1^2} \cdot \frac{t_1}{t_2} = \frac{2s_1}{t_1 t_2} = 1{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$ **1 bod**

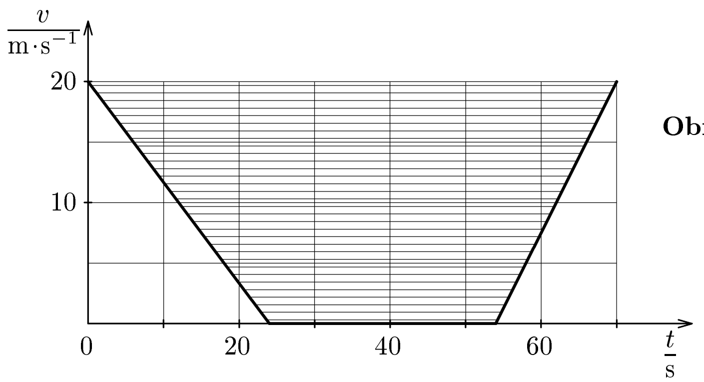
c) Označme Δt dobu do zastavení na dráze Δs. Z rovnic

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 , \qquad v' = a_1 \Delta t$$

plyne $v' = \sqrt{2 a_1 \Delta s}$. Po dosazení za a_1 z rovnice (1) dostaneme

$$v' = \frac{2}{t_1} \sqrt{s_1 \Delta s} \doteq 9{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} .$$ **2 body**

d,e) Graf rychlosti je na obr. R.1: Dráhový náskok, který by získal vlak projíždějící zastávkou bez zastavení stálou rychlostí v_0, je číselně roven obsahu vyšrafovaného lichoběžníka. Vychází 1000 m.



Obr. R1

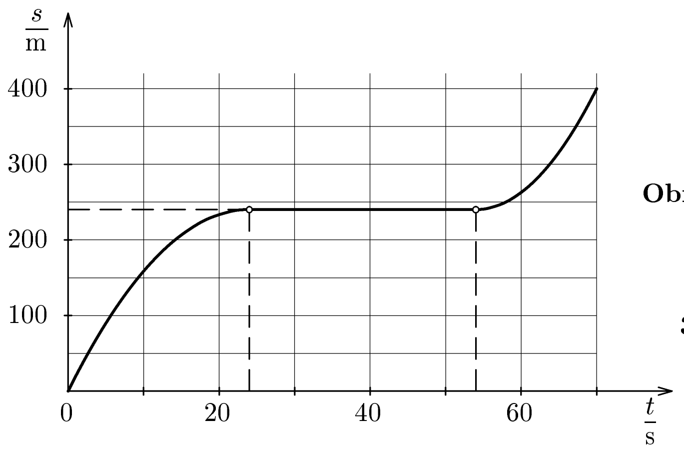
3 body

Graf dráhy je na obr. R2: První parabolický úsek grafu můžeme popsat vztahem

$$s = s_1 - \frac{1}{2} a_1 (t_1 - t)^2 .$$

Druhý parabolický úsek grafu je popsán vztahem

$$s = s_1 + \frac{1}{2}a_2(t - t_1 - t')^2 .$$



Obr. R2

3 body

2.a) Při jízdě poloviční rychlostí dorazí řidič do poloviny dráhy v okamžiku, kdy už měl být v cíli. Úloha proto nemá řešení. (Ke stejnému výsledku dojdeme i z obecného řešení úlohy b).) **2 body**

b) Označme délku celé dráhy $2s$ a dobu jízdy na první polovině dráhy t_1 a na druhé polovině dráhy t_2. Pak platí

$$v_\mathrm{p} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} . \qquad (1)$$

Úpravou rovnice dostaneme

$$v_2 = \frac{v_1v_\mathrm{p}}{2v_1 - v_\mathrm{p}} = 120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} .$$ **2 body**

c) Použijeme-li v rovnici (1) rychlosti v_1' a v_2', dostaneme

$$v_1' = \frac{v_2'v_\mathrm{p}}{2v_2' - v_\mathrm{p}} = 45\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} .$$ **2 body**

d) Označme t dobu jízdy podle původního záměru, t' dobu jízdy podle nových podmínek. Pak platí

$$t' = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2'} = \frac{v_1 + v_2'}{v_1v_2'}s = \frac{v_1 + v_2'}{v_1v_2'} \cdot \frac{v_\mathrm{p}t}{2} = \frac{(v_1 + v_2')v_\mathrm{p}}{2v_1v_2'}\,t = \frac{4}{3}\,t .$$

2 body

e) Použijeme-li v rovnici (1) rychlosti v_2' a v_p', dostaneme

$$v_p' = \frac{2v_1v_2'}{v_1 + v_2'} = 45\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\,.$$ **2 body**

3.a) Pokud se vagon přiblíží těsně k lokomotivě, aniž dojde ke srážce, budou mít v tomto okamžiku obě tělesa stejnou rychlost v_0. Stane se to v čase $t = v_0/a_{\min}$ od počátku pohybu lokomotivy. Porovnáním drah dostaneme rovnici

$$v_0 t = s_0 + \frac{1}{2}a_{\min}t^2\,.$$

Řešením soustavy dostaneme

$$\frac{v_0^2}{a_{\min}} = s_0 + \frac{v_0^2}{2a_{\min}}\,, \qquad a_{\min} = \frac{v_0^2}{2s_0} = 0{,}40\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$ **1 bod**

b) Porovnáním drah dostaneme kvadratickou rovnici pro hledaný čas t_1:

$$v_0 t_1 = s_0 + \frac{1}{2}at_1^2\,,$$

která má dva kladné kořeny. Úloze vyhovuje menší kořen

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2as_0}}{a} \doteq 3{,}3\ \mathrm{s}$$ **2 body**

c) Těsně před srážkou bude mít lokomotiva rychlost

$$v_1 = at_1 = v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2as_0} = 1{,}0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$ **1 bod**

d) Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$m_0v_0 + m_1at_1 = (m_0 + m_1)u\,, \quad u = \frac{m_0v_0 + m_1at_1}{m_0 + m_1} = 1{,}4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$ **2 body**

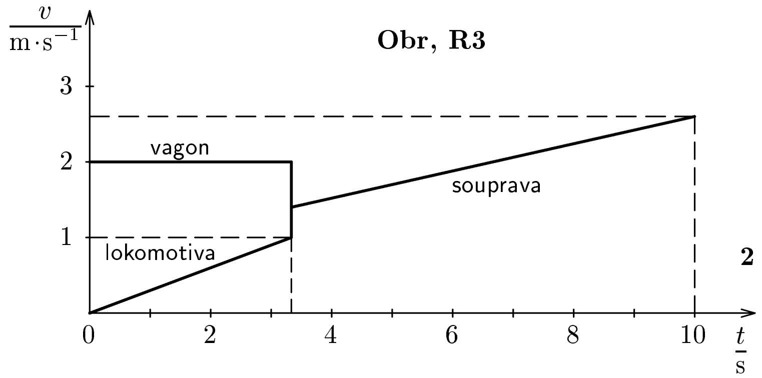
e) Po připojení vagonu k lokomotivě se její zrychlení zmenší na

$$a_1 = \frac{F}{m_0 + m_1} = \frac{m_1 a}{m_0 + m_1}\,.$$

V čase $3t_1$ bude mít souprava rychlost

$$u_1 = u + a_1 \cdot 2t_1 = \frac{m_0v_0 + 3am_1t_1}{m_0 + m_1} = 2{,}6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$ **2 body**

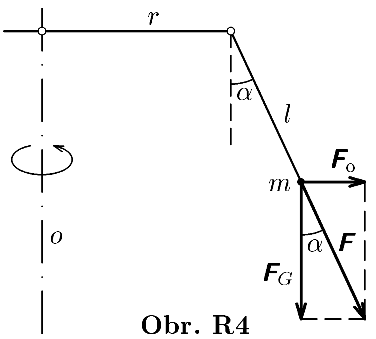
f)



Obr, R3

2 body

4. a)



Obr. R4

Z hlediska chlapce na sedačce, v neinerciální vztažné soustavě spojené s kolotočem, je hledaná síla rovna výslednici tíhové síly a setrvačné odstředivé síly. Platí

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} \doteq 600\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

b) Podle obrázku je

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_G} = \frac{ma_\mathrm{d}}{mg} = \frac{a_\mathrm{d}}{g}\,, \qquad a_\mathrm{d} = g\,\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 6{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$ **2 body**

c) Poloměr kružnice, po které obíhá chlapec, je $r + l\sin\alpha$. Pro dostředivé zrychlení platí

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r + l\sin\alpha} = g\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Z toho

$$v = \sqrt{g(r + l\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha} \doteq 6{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$ **3 body**

d) Pro periodu platí

$$T = \frac{2\pi(r + l\sin\alpha)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r + l\sin\alpha}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \doteq 5{,}6\ \mathrm{s}\,.$$ **3 body**

5. a) Při šikmém vrhu s nulovou počáteční výškou je závislost souřadnic hmotného bodu na čase popsána vztahy

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Z podmínky $y = 0$ určíme dobu letu t_0 a délku vrhu d:

$$t_0 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\,, \qquad d = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}\,.$$

Jelikož $\sin\alpha_1 = \cos\alpha_2$ a $\cos\alpha_1 = \sin\alpha_2$, jsou pro dané hodnoty elevačních úhlů délky obou vrhů stejné: $d_1 = d_2 \doteq 35{,}3\ \mathrm{m}$. **2 body**

b) Výšku vrhu h určíme jako souřadnici y v čase $t_1 = t_0/2$:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Pro dané elevační úhly dostaneme $h_1 \doteq 5{,}1\ \mathrm{m}$, $h_2 \doteq 15{,}3\ \mathrm{m}$ **2 body**

c) Při vodorovném vrhu z výšky h_0 je závislost souřadnic hmotného bodu na čase popsána vztahy:

$$x = v_0 t\,, \qquad y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Z podmínky $y = 0$ určíme dobu letu t_1 a délku vrhu d:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \qquad d = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,.$$

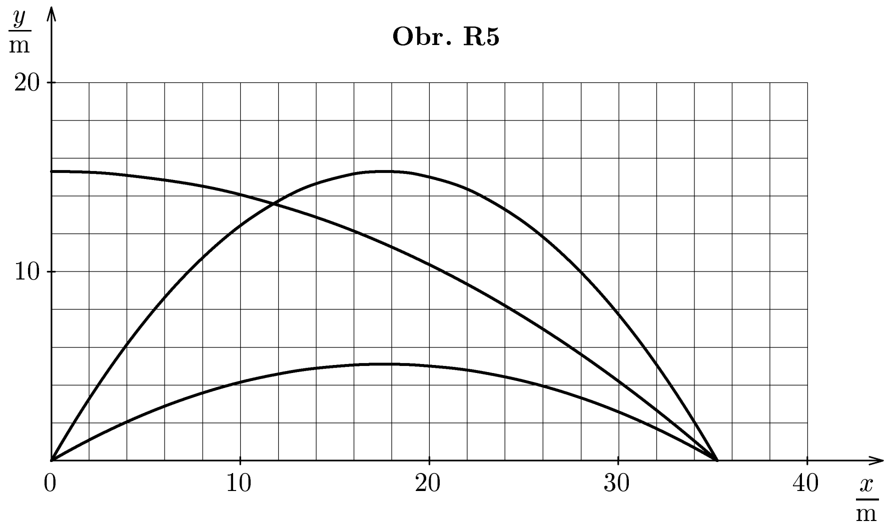
Úpravou dostaneme:

$$h_0 = \frac{g d^2}{2 v_0^2}\,.$$

Protože $d_1 = d_2$, platí $h_{01} = h_{02} \doteq 15{,}3\ \mathrm{m}$. **2 body**

d) Doby letu míčku jsou $t_{01} = 2{,}04\ \mathrm{s}$, $t_{02} = 3{,}53\ \mathrm{s}$, $t_1 = 1{,}77\ \mathrm{s}$. **1 bod** e)

Obr. R5



3 body

7. a) Podle zákona zachování hybnosti

$$m_0 v_1 = m_0 w\,, \qquad v_1 = w = 3000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ **1 bod**

b) V inerciálních soustavách spojených s raketou před prvním a před druhým vypuzením plynu platí podle zákona zachování hybnosti:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}m_0\Delta v_1 &= \frac{1}{2}m_0 w\,, \\ m_0\Delta v_2 &= \frac{1}{2}m_0 w\,. \end{aligned}$$

Z rovnic plyne

$$v_2 = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \frac{1}{3}w + \frac{1}{2}w = \frac{5}{6}w = 2500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

c) Analogicky pro odvrhnutí plynu ve 3 fázích platí:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}m_0\Delta v_1 &= \frac{1}{3}m_0 w\,, \\ \frac{4}{3}m_0\Delta v_2 &= \frac{1}{3}m_0 w\,, \\ m_0\Delta v_3 &= \frac{1}{3}m_0 w\,. \end{aligned}$$

Z rovnic plyne

$$v_3 = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = \frac{1}{5}w + \frac{1}{4}w + \frac{1}{3}w = \frac{47}{60}w = 2350\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

d) Obecně pro n platí:

$$\begin{aligned}
\frac{2n-1}{n}m_0\Delta v_1 &= \frac{1}{n}m_0 w\,,\\
\frac{2n-2}{n}m_0\Delta v_2 &= \frac{1}{n}m_0 w\,,\\
&\vdots\\
m_0\Delta v_n &= \frac{1}{n}m_0 w\,.
\end{aligned}$$

Z rovnic plyne

$$v_n = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \cdots + \Delta v_n = \frac{1}{2n-1}w + \frac{1}{2n-2}w + \cdots + \frac{1}{2n-n}w\,.$$

2 body

Pro vybraná n vychází:

$$\begin{aligned}
v_6 &= 0{,}7365w = 2210\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\
v_{10} &= 0{,}7188w = 2160\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\
v_{100} &= 0{,}6957w = 2090\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\
v_{1000} &= 0{,}6934w = 2080\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$ **1 bod**

S rostoucím počtem kroků se výsledek čím dál více přibližuje skutečné hodnotě výsledné rychlosti rakety při spojitém vypuzování plynu, kterou bychom vypočítali integrálním počtem. Takto získaný výsledek s přesností na 6 platných číslic je

$$v = w \cdot \ln\frac{2m_0}{m_0} = w \cdot \ln 2 = 0{,}693147w = 2079{,}44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

e) Obecně pro n platí:

$$\begin{aligned}
7m_0 - \frac{1}{n}6m_0\Delta v_1 &= \frac{6m_0}{n}w\,,\\
7m_0 - \frac{2}{n}6m_0\Delta v_2 &= \frac{6m_0}{n}w\,,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$m_0 \Delta v_n = \frac{6m_0}{n} w\,.$$

Z rovnic plyne

$$v_n = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \cdots + \Delta v_n = \frac{6}{7n-6} w + \frac{6}{7n-12} w + \cdots + \frac{6}{7n-6n} w\,.$$

2 body

Pro vybraná n vychází:

$$\begin{aligned} v_6 &= 2{,}450w = 7350\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\ v_{10} &= 2{,}232w = 6700\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\ v_{100} &= 1{,}972w = 5920\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\\ v_{1000} &= 1{,}948w = 5840\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

1 bod

Pro $n \to \infty$ (spojité vypuzování plynu) dostaneme užitím integrálního počtu s přesností na 6 platných číslic

$$v = w \cdot \ln \frac{7m_0}{m_0} = w \cdot \ln 7 = 1{,}94591w = 5837{,}73\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

f) Výsledná rychlost nedosahuje ani první kosmické rychlosti. Při vyslání rakety na oběžnou dráhu kolem Země je kromě urychlení rakety na kruhovou rychlost potřeba ještě vykonat práci nutnou ke zvýšení potenciální energie rakety a k překonání odporové síly atmosféry. Jednostupňová raketa nemůže dosáhnout kosmických rychlostí. Používají se vícestupňové rakety, u kterých se využité části postupně odhazují. Požadovanou rychlost získá jen poslední stupeň rakety. Poměr hmotnosti kosmické lodi na oběžné dráze a startovní hmotnosti bývá zhruba 1:20.

1 bod