Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: L'. Mucha (2, 3), a P. Šedivý (1, 4)

1.a) Před dopadem na kvádr získá kulička (podle zákona zachování energie) rychlost o velikosti

$$v_1 = \sqrt{2gl} = 4{,}43\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Těsně po odrazu bude mít kulička rychlost o velikosti u_1 (ve směru zpět) a kvádr rychlost o velikosti u_2 (ve směru nárazu). Jestliže se po odrazu kulička vychýlí o úhel α_1, platí podle ZZE:

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1-\cos\alpha_1)\,. \quad \text{Z toho} \quad u_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)} = 1{,}62\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Podle zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2\,, \qquad u_2 = \frac{m}{M}(v_1+u_1) = \frac{m}{M}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)\sqrt{2gl}\,.$$

Během brzdění kvádr ztratí kinetickou energii a vykoná práci proti síle tření:

$$W = F_\mathrm{t}d = fMgd = \frac{1}{2}Mu_2^2\,,$$

$$d = \frac{u_2^2}{2fg} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{l}{f}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)^2 = 0{,}47\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

c) V případě dokonale pružného odrazu by platil zákon zachování hybnosti i zákon zachování energie:

$$mv_1 = -mu_1 + Mu_2\,, \qquad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2\,.$$

Řešením této soustavy rovnic určíme velikost rychlosti kuličky po odrazu:

$$u_1 = \frac{M-m}{M+m}v_1\,.$$

Pro vychýlení kuličky platí podobně jako v a): $\frac{1}{2}mu_1^2 = mgl(1-\cos\alpha_2)$,

$$\cos\alpha_2 = 1-\frac{u_1^2}{2gl} = 1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} = 0{,}64\,, \qquad \alpha_2 \doteq 50^\circ\,.$$

4 body

2. a) Při pohybu lyžaře se uplatní pohybová složka tíhové síly, smykové tření a odpor vzduchu. Výslednice těchto sil má velikost

$$F = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Kv^2 \, .$$

Na velmi dlouhém svahu dosáhne rychlost lyžaře mezní hodnoty v_m, při které je výslednice všech sil nulová a platí

$$mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Kv_\mathrm{m}^2 = 0 \, ,$$

$$K = \frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{v_\mathrm{m}^2} = 0{,}5605 \ \mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot s^2} \, .$$

3 body

b) Při modelování pohybu numerickou metodou pomocí jednodušší kalkulačky zvolíme časový krok $\Delta t = h = 1\,\mathrm{s}$. Okamžité zrychlení lyžaře v čase t_i je

$$a_i = \frac{F}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{K}{m}v^2 = a_0 - Lv^2 \, .$$

$$a_0 = 2{,}0178\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \, , \qquad L = 0{,}006228\ \mathrm{m^{-1}} \, .$$

(Zaokrouhlíme až konečné výsledky.)

Při postupném výpočtu dráhy a rychlosti můžeme použít rekurentní vztahy

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot h \, , \qquad s_{i+1} = s_i + v_i \cdot h + \frac{1}{2}a_i \cdot h^2 = s_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \cdot h \, .$$

3 body

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v levé tabulce. Pokud bychom zvolili kratší časový krok, přesnost modelu by se zvětšila a hodnoty by se přibližovaly k přesným hodnotám získaným analytickým řešením úlohy, které jsou uvedeny v pravé tabulce.

Zpracování tabulky 3 body

c) I při omezené přesnosti použité metody můžeme z tabulky vyčíst, že lyžař projede prvních 50 m za dobu mezi 7 s a 8 s a na této dráze získá rychlost přibližně $12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

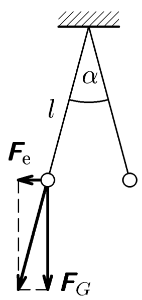
1 bod

numeri		cká metoda			přesný v	ýpočet
t / s	*s* / m	*v* / m.s^{-1}	*a* / n	n.s^{-2}	*s* / m	*v* / m.s^{-1}
0	0,00	0,000	2,0	178	0,000	0,000
1	1,009	2,018	1,9	924	1,007	2,009
2	4,023	4,010	1,9	176	4,002	3,969
3	8,992	5,928	1,7	989	8,914	5,835
4	15,819	7,727	1,6	460	15,629	7,571
5	24,369	9,373	1,4	707	24,003	9,150
6	34,477	10,843	1,2	855	33,873	10,561
7	45,964	12,129	1,1	016	45,066	11,797
8	58,643	13,231	0,9	276	57,411	12,865
9	72,338	14,158	0,7	694	70,745	13,776
10	86,881	14,928	0,6	300	84,915	14,543

3. Kuličky na sebe ve vakuu vzájemně působí odpudivou silou

$$F_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, \qquad \text{kde} \qquad r = 2l\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Obr. R1



Výsledná síla, která vzniká složením síly elektrické a síly tíhové, má směr vlákna a platí

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{F_\mathrm{e}}{F_G} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg4l^2\sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= \frac{3Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varrho gl^2d^3\sin^2(\alpha/2)}\,.$$

Elektrický náboj kuliček je

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}\varepsilon_0\varrho gl^2d^3\sin^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2)} = 54\ \mathrm{nC}\,.$$

5 bodů

Po ponoření do dielektrické kapaliny se elektrické síly zmenší $\varepsilon_\mathrm{r}$krát a proti tíhové síle bude působit síla vztlaková.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{F_\mathrm{er}}{F_G - F_\mathrm{v}} = \frac{3Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(\varrho-\varrho_0)gl^2d^3\sin^2(\beta/2)}\,.$$

Vydělením rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha/2)}{\mathrm{tg}(\beta/2)} = \varepsilon_\mathrm{r} \frac{(\varrho - \varrho_0)\sin^2(\beta/2)}{\varrho \sin^2(\alpha/2)} ,$$

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \frac{\varrho \sin^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2)}{(\varrho - \varrho_0)\sin^2(\beta/2)\,\mathrm{tg}(\beta/2)} = 8{,}7 .$$

5 bodů

4.a) Na horním obrázku předbíhá proud před napětím časově o $T/4$, fázově o $\pi/2$. Jedná se tedy o obvod s kondenzátorem. Na dolním obrázku je proud opožděn za napětím časově o necelou čtvrtinu periody, fázově o necelou polovinu π. Jedná se tedy o obvod s cívkou, která ovšem není ideální a má nezanedbatelnou rezistanci. **1 bod**

b) Obvodem s kondenzátorem prochází proud o periodě $T = 0{,}040$ s. Amplitudy napětí a proudu jsou $U_\mathrm{m} = 4{,}0$ V a $I_\mathrm{m} = 2{,}7$ mA. **1 bod**

Platí: $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}} , \qquad C = \frac{I_\mathrm{m}}{\omega U_\mathrm{m}} = \frac{T I_\mathrm{m}}{2\pi U_\mathrm{m}} .$$ **1 bod**

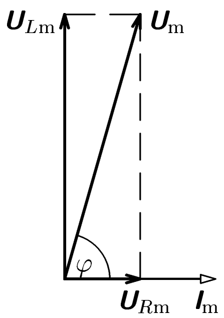
Numericky: $C = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ F $= 4{,}3\ \mu$F. **1 bod**

c) Obvodem s cívkou prochází proud s periodou $T = 0{,}80$ s, který je opožděn za napětím o dobu $\tau = 0{,}16$ s. Fázové posunutí je tedy

$$\varphi = \frac{\tau}{T} 2\pi = 0{,}40\,\pi = 72^\circ .$$

Amplitudy napětí a proudu jsou $U_\mathrm{m} = 4{,}0$ V a $I_\mathrm{m} = 4{,}8$ mA. **2 body**

Obr. R1



Sériovému spojení ideální cívky s ideálním rezistorem přísluší fázorový diagram na obr. R1, ze kterého odvodíme:

$$U_{R\mathrm{m}} = U_\mathrm{m} \cos\varphi = 1{,}24 \text{ V} ,$$

$$U_{L\mathrm{m}} = U_\mathrm{m} \sin\varphi = 3{,}8 \text{ V} .$$

Dále platí: $R = \dfrac{U_{R\mathrm{m}}}{I_\mathrm{m}}$, $\qquad X_L = \omega L = \dfrac{U_{L\mathrm{m}}}{I_\mathrm{m}}$,

$$L = \frac{U_{L\mathrm{m}} T}{2\pi I_\mathrm{m}} .$$ **3 body**

Numericky: $R \doteq 260\ \Omega$, $L \doteq 100$ H. **1 bod**