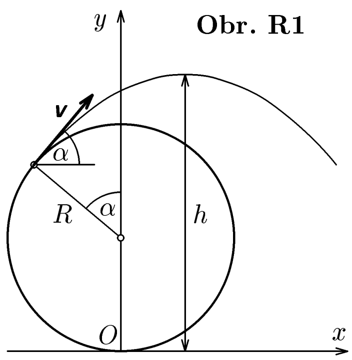
Řešení teoretických úloh celostátního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: I. Košinár (1), P. Šedivý (2), B. Vybíral (3), J. Slabeycius (4)

1. Pohyb kapek budeme popisovat z hlediska pozorovatele spojeného s vozidlem. Vztažnou soustavu zvolíme podle obr. R1. Opustí-li kapka pneumatiku v bodě určeném úhlem α, odletí ve směru tečny a koná šikmý vrh vzhůru s elevačním úhlem α a počáteční rychlostí, jejíž velikost je rovna obvodové rychlosti kola v. Pohyb kapky je popsán rovnicemi



Obr. R1

$$x = vt\cos\alpha - R\sin\alpha\,,$$

$$y = R(1+\cos\alpha) + vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

V čase $t = \dfrac{v\sin\alpha}{g}$ dosáhne kapka vrcholu parabolické trajektorie o souřadnici

$$h = R(1+\cos\alpha) + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{2Rg}{v^2} + \frac{2Rg\cos\alpha}{v^2} + 1 - \cos^2\alpha\right). \quad (1)$$

3 body

Úpravou dostaneme

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2 - \left(\frac{Rg}{v^2} - \cos\alpha\right)^2\right]. \quad (2)$$

Je-li splněna podmínka

$$\frac{Rg}{v^2} < 1 \quad \text{neboli} \quad v^2 > Rg\,, \quad (3)$$

bude mít funkce (2) pro $\cos\alpha = \dfrac{Rg}{v^2}$ maximální hodnotu

$$h_{\max} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2. \quad (4)$$

(Ke stejnému výsledku dojdeme nalezením extrému funkce (1) pomocí první derivace). **3 body**

Platí
$$h_{\max} = R\left(\frac{Rg}{2v^2} + 1 + \frac{v^2}{2Rg}\right) > 2R\,,$$

neboť $\forall x \in \mathsf{R}^+ - \{1\}: \ \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{1}{2x} > 2.$

Pokud by platilo $v^2 \leq Rg$, funkce (2) by dosáhla maxima velikosti $2R$ pro $\alpha = 0$. Kapky by tedy nemohly překonat výšku $2R$, jak je požadováno v zadání úlohy.

Hledanou rychlost kola nalezneme řešením rovnice (4). Po úpravě:

$$v^4 + (2Rg - 2hg)v^2 + R^2g^2 = 0\,, \qquad v^2 = g\left[(h-R) \pm \sqrt{(h-R)^2 - R^2}\right]\,,$$

$$v = \sqrt{g\left[(h-R) + \sqrt{(h-R)^2 - R^2}\right]}\,.$$

(Znaménko (-) nevyhovuje podmínce (3).)

3 body

Pro dané hodnoty: $v = 5{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 20\ \mathrm{km/h}$.

1 bod

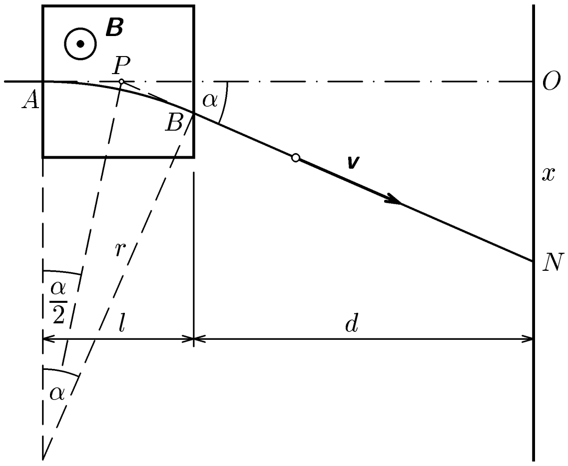
2.a) Působí-li pouze magnetické pole, pohybuje se iont podle obr. R2. Mezi pólovými nástavci na něj působí dostředivá magnetická síla $F_\mathrm{m} = Bev = mv^2/r$, která zakřivuje jeho trajektorii do kruhového oblouku AB o poloměru

$$r = \frac{mv}{Be}$$

a odchýlí vektor rychlosti o úhel α, pro který platí $\sin\alpha = l/r$. Po opuštění magnetického pole se iont pohybuje po přímce procházející bodem P na ose o, pro který platí $|AP| = r\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, a dopadá na stínítko do bodu N o souřadnici

$$x = |OP|\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(d + l - r\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{tg}\,\alpha\,. \qquad (1)$$

Obr. R2



Připojíme-li na vychylovací destičky napětí, bude na iont kromě magnetické síly působit i síla elektrická, která mu udělí ve směru osy y zrychlení

$$a_y = \frac{F_\mathrm{e}}{m} = \frac{Ee}{m}\,.$$

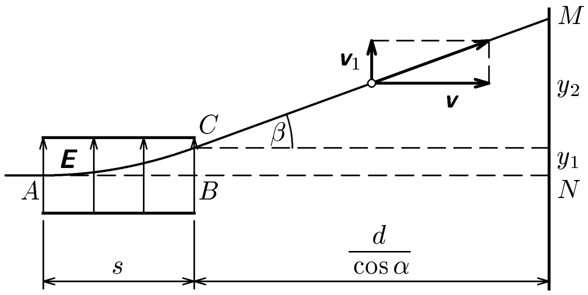
Pohyb iontu bude probíhat jako pohyb složený z výše popsaného rovnoměrného pohybu po kruhovém oblouku AB délky $s = r\alpha$ a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve směru osy y. Za dobu t, po kterou bude iont mezi pólovými nástavci, posune se ve směru osy y a opustí elektrické a magnetické pole v bodě C o souřadnici y_1. Přitom bude mít ve směru osy y rychlost $\boldsymbol{v}_1$. Za bodem C se bude pohybovat po přímce se sklonem β a dopadne na stínítko v bodě M, který je od bodu N posunut ve směru osy y do vzdálenosti $y = y_1 + y_2$.

Rozvineme-li svislou plochu, ve které leží trajektorie iontu, do roviny, dostaneme obr. R3. Platí:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{r\alpha}{v}\,, \qquad v_1 = a_y t\,, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_1}{v}\,, \tag{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad y_2 = \frac{d}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta\,. \tag{3}$$

Obr. R3



Pro malé úhly můžeme použít aproximaci:

$$\sin\alpha = \frac{lBe}{mv} \doteq \alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha \doteq 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,, \qquad \cos\alpha \doteq 1\,.$$

Dosazením do (1) až (3) dostaneme přibližné vztahy

$$x \doteq \left(d + l - \frac{mv}{Be}\cdot\frac{lBe}{2mv}\right)\frac{lBe}{mv} = \left(d + \frac{l}{2}\right)\frac{lBe}{mv}\,, \tag{4}$$

$$t \doteq \frac{mv}{Be}\cdot\frac{lBe}{mv}\cdot\frac{1}{v} = \frac{l}{v}\,,$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Ee}{m}\cdot\left(\frac{l}{v}\right)^2 + d\frac{\frac{Ee}{m}\cdot\frac{l}{v}}{v} = \left(d + \frac{l}{2}\right)\frac{lEe}{mv^2}\,. \tag{5}$$

5 bodů

Podle přibližných vztahů jsou souřadnice bodu M_1 dopadu iontů $^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$:

$x_1 = 0{,}0239\ \mathrm{m} = 23{,}9\ \mathrm{mm}, \quad y_1 = 0{,}0095\ \mathrm{m} = 9{,}5\ \mathrm{mm},$

a souřadnice bodu M_2 dopadu iontů $^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$:

$x_2 = 0{,}0217\ \mathrm{m} = 21{,}7\ \mathrm{mm}, \quad y_2 = 0{,}0087\ \mathrm{m} = 8{,}7\ \mathrm{mm}.$ **2 body**

Přesným numerickým výpočtem podle vztahů (1) až (3) dostaneme
pro iont ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$:
$r = 0{,}20750\,\mathrm{m},\ \alpha = 0{,}145087\,\mathrm{rad},\ t = 6{,}021 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s},\ \beta = 0{,}058034\,\mathrm{rad},$
$x = 0{,}0241\ \mathrm{m},\ y = 0{,}00968\ \mathrm{m},$
pro iont ${}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$:
$r = 0{,}22825\,\mathrm{m},\ \alpha = 0{,}131816\,\mathrm{rad},\ t = 6{,}017 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s},\ \beta = 0{,}052726\,\mathrm{rad},$
$x = 0{,}0219\ \mathrm{m},\ y = 0{,}00878\ \mathrm{m}.$

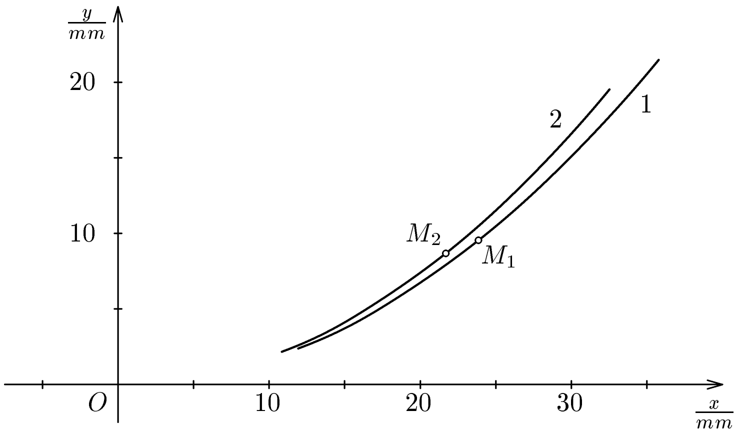
b) Rovnice (4) a (5) jsou vlastně přibližné parametrické rovnice hledané křivky. Parametrem je rychlost v. Vyloučením parametru dostaneme

$$y = \frac{mE}{\left(d + \frac{l}{2}\right) l B^2 e} x^2 = \begin{cases} 16{,}8\ m^{-1} \cdot x^2 & \text{pro } {}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+ \\ 18{,}4\ m^{-1} \cdot x^2 & \text{pro } {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+ \end{cases}$$

což jsou rovnice parabol. Ionty tedy na fotografické desce vytvoří přibližně oblouky parabol (obr. R4).

3 body

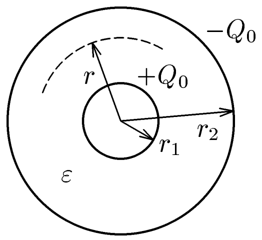
Obr. R4



3. a) *První způsob:* Z Gaussovy věty:

$$2\pi r l E = \frac{Q_0}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon r l}\,.$$

Obr. R5



Napětí mezi elektrodami je:

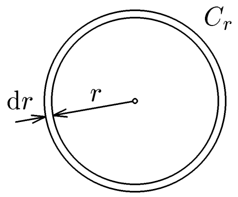
$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.$$

$$C = \frac{Q_0}{U_0} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = 6{,}3\cdot 10^{-11}\ \mathrm{F} = 63\ \mathrm{pF}\,.$$

Druhý způsob: Pokud neznáme Gaussovu větu, lze řešit jako soustavu sériově spojených kondenzátorů elementární tloušťky dr. Pro kapacitu C_r takového kondenzátoru na poloměru r platí (vychází se ze vzorce pro deskový kondenzátor):

$$\frac{1}{C_r} = \frac{\mathrm{d}r}{\varepsilon S_r} = \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon l r}\,.$$

Obr. R6



Celková kapacita je dána součtem — integrálem:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi\varepsilon l} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,.$$

3 body

b) Prostor mezi elektrodami si lze představit jako vodič s proměnným příčným průřezem. Na poloměru r bude $S_r = 2\pi r l$. Element dielektrika má odpor

$$\mathrm{d}R_\mathrm{i} = \varrho\frac{\mathrm{d}r}{S_r} = \varrho\frac{\mathrm{d}r}{2\pi r l}\,.$$

Výsledný odpor je

$$R_\mathrm{i} = \frac{\varrho}{2\pi l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\varrho\ln\dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi l} = 4{,}7\cdot 10^{10}\ \Omega = 47\,000\ \mathrm{M\Omega}\,.$$

Ztrátový proud je

$$I_z = \frac{U_0}{R_i} = \frac{2\pi l U_0}{\varrho \ln \frac{r_2}{r_1}} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{A} = 0{,}026\ \mu\mathrm{A}\,.$$

3 body

c) Počáteční náboj

$$Q_0 = CU_0 = \frac{2\pi\varepsilon l U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 7{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}\,.$$

Podle Ohmova zákona je $U = R_i I$, kde $U = Q/C$ je okamžité napětí (po odpojení od zdroje) a Q je okamžitý náboj. Proud I souvisí s úbytkem náboje a platí pro něj $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$.

$$\frac{Q}{C} = -R_i \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \text{Pak:} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{R_i C}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{\varrho\varepsilon}\,,$$

neboť

$$R_i C = \frac{\varrho \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l} \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \varrho\varepsilon\,.$$

Integrací od Q_0 do Q a od 0 do t dostaneme:

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{\varrho\varepsilon}\,, \qquad Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varrho\varepsilon}}\,.$$

V čase t_1 bude na kondenzátoru náboj

$$Q_1 = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\varrho\varepsilon}} = 1{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}\,.$$

4 body

4.a) Rovnováha plovoucí zkumavky v okamžiku přechodu do klesavého pohybu je dána rovnicí $F_G = F_\mathrm{v}$,

$$[m_{dna} + L(S_2 - S_1)\varrho_s]g = [L(S_2 - S_1) + xS_1]\varrho_\mathrm{v} g\,.$$

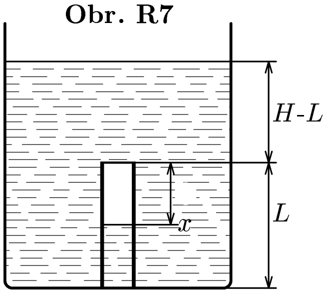
Po zanedbání hmotnosti dna, dosazení a úpravě dostaneme:

$$x = L\left(\frac{D^2}{d^2} - 1\right)\left(\frac{\varrho_\mathrm{s}}{\varrho_\mathrm{v}} - 1\right) = 4{,}22\ \mathrm{cm}\,.$$

3 body

b) V horní poloze je tlak vzduchu ve zkumavce $p_1 = p_\mathrm{a} + x\varrho_\mathrm{v} g$ při teplotě $t_1 = 15\ ^\circ\mathrm{C}$ ($T_1 = 288{,}15\ \mathrm{K}$). Po klesnutí ke dnu se tlak vzduchu ve zkumavce zvětší a výška vzduchového sloupce se zmenší. Tím bude rovnováha mezi vztlakovou silou a tíhovou silou porušena. Obnoví se, když teplota soustavy stoupne na hodnotu t_2, při které se výška vzduchového sloupce opět vrátí na hodnotu x. Tlak vzduchu ve zkumavce bude $p_2 = p_\mathrm{a} + (H - L + x)\varrho_\mathrm{v} g$.

Obr. R7



Proto

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_\mathrm{a} + (H - L + x)\varrho_\mathrm{v} g}{p_\mathrm{a} + x\varrho_\mathrm{v} g}\,,$$

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{(H - L)\varrho_\mathrm{v} g}{p_\mathrm{a} + x\varrho_\mathrm{v} g}\right) = 292{,}4\ \mathrm{K}\,, \quad t_2 = 19{,}2\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

Při dalším zvyšování teploty až do 25 °C zkumavka vyplave nahoru a dno se nepatrně vynoří nad hladinu.

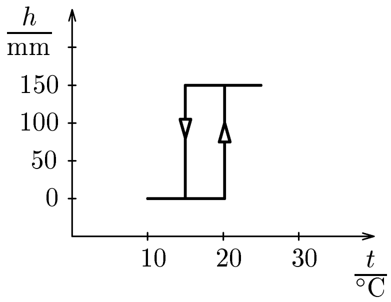
3 body

Bude-li teplota zvolna kolísat mezi 10 °C a 25 °C, klesne zkumavka ke dnu při každém poklesu teploty pod 15 °C a opět se vrátí k hladině při každém vzrůstu nad 19,2 °C. Výška h dolního konce zkumavky nad dnem se bude měnit podle grafu na obr. R8 mezi hodnotami 0 a $H - L = 150$ mm. Vidíme, že v chování zkumavky se projevuje určité opožďování — *hystereze.*

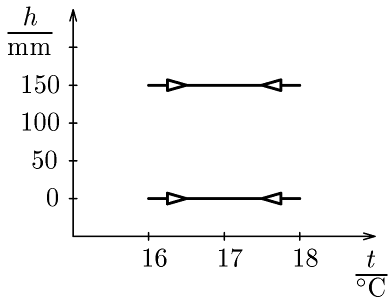
2 body

c) Zmenší-li se kolísání teploty na interval od 16 °C do 18 °C, záleží na tom, jaký byl předcházející stav soustavy. Pokud byla předcházející teplota vyšší a zkumavka plavala u hladiny, bude setrvávat u hladiny. Jestliže však předcházející teplota byla nižší a zkumavka se nacházela u dna, bude setrvávat u dna. Bude tedy platit jeden z grafů na obr. R9.

2 body



Obr. R8



Obr. R9