Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4), I. Volf (3)

1.a) Průměrné rychlosti jsou

$$v_{p1} = \frac{s_1}{t_1} \doteq 9{,}27\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_{p2} = \frac{s_2}{t_2} \doteq 10{,}05; \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Vyjdeme ze vztahů

$$s_1 = s_0 + v_\mathrm{m}(t_1 - t_0) = \frac{v_\mathrm{m} t_0}{2} + v_\mathrm{m}(t_1 - t_0) = v_\mathrm{m}\left(t_1 - \frac{t_0}{2}\right)\,, \tag{1}$$

$$s_2 = s_0 + v_\mathrm{m}(t_2 - t_0) = \frac{v_\mathrm{m} t_0}{2} + v_\mathrm{m}(t_2 - t_0) = v_\mathrm{m}\left(t_2 - \frac{t_0}{2}\right)\,. \tag{2}$$

2 body

Odečtením rovnic (1), (2) dostaneme

$$s_2 - s_1 = v_\mathrm{m}(t_2 - t_1)\,, \qquad v_\mathrm{m} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 11{,}49\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Vydělením rovnic (1), (2) dostaneme

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2 - \dfrac{t_0}{2}}{t_1 - \dfrac{t_0}{2}}\,, \quad s_2(2t_1 - t_0) = s_1(2t_2 - t_0)\,, \quad t_0 = \frac{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)}{s_2 - s_1} = 2{,}50\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

Dále platí

$$a = \frac{v_\mathrm{m}}{t_0} = \frac{(s_2 - s_1)^2}{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)(t_2 - t_1)} \doteq 4{,}60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

$$s_0 = \frac{v_\mathrm{m} t_0}{2} = \frac{s_2 t_1 - s_1 t_2}{t_2 - t_1} \doteq 14{,}37\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

2.a) Velikost rychlosti sedačky v čase t_0 je

$$v_0 = r\omega_0 = 3{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$ **1 bod**

b) Dráha sedačky uražená během zrychleného pohybu je

$$s = \frac{1}{2}a_\mathrm{t}t_0^2\,, \quad \text{kde} \quad a_\mathrm{t} = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0}$$

je tečné zrychlení sedačky. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$s = \frac{1}{2}r\omega_0 t_0 = 27\ \mathrm{m}\,.$$ **2 body**

c) Pro počet otáček během rovnoměrně zrychleného pohybu platí

$$N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\frac{1}{2}r\omega_0 t_0}{2\pi r} = \frac{\omega_0 t_0}{4\pi} \doteq 1{,}43\,.$$ **2 body**

d) Pro velikosti tečného, dostředivého a celkového zrychlení v časovém intervalu od 0 do t_0 platí

$$a_\mathrm{t} = \frac{r\omega_0}{t_0} = \text{konst.}\,,$$

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r}\,, \quad \text{kde} \quad v = a_\mathrm{t}t = \frac{r\omega_0}{t_0}t$$

je velikost okamžité rychlosti sedačky. Po dosazení a úpravě máme

$$a_\mathrm{d} = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2}t^2\,.$$

Velikost celkového zrychlení je

$$a = \sqrt{a_\mathrm{d}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \frac{r\omega_0}{t_0}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 t^4}{t_0^2}}\,.$$

V čase $t = t_0$ je $a_\mathrm{d} = 0{,}69\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $a = 0{,}73\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **3 body**

e) Velikosti tečného a dostředivého zrychlení jsou si rovny, když

$$\frac{r\omega_0}{t_0} = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2}t^2\,. \quad \text{Z toho} \quad t_1 = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}} = 3{,}5\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

3. a) Z rovnic pro pohyb vzhůru a pro pohyb dolů $h - h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2\,, \quad h = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne pro hledanou dobu

$$t = t_0 + t_1 = \sqrt{\frac{2(h-h_0)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0{,}87\ \mathrm{s} + 1{,}21\ \mathrm{s} = 2{,}08\ \mathrm{s}\,.$$

Velikost počáteční rychlosti míčku a rychlosti prvního dopadu míčku na zem určíme ze zákona zachování energie:

$$mg(h-h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2g(h-h_0)} \doteq 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2gh} \doteq 11{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Obdobně určíme rychlost bezprostředně po prvním odrazu od země:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2gh_0} \doteq 8{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Koeficient restituce

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_0}{h}} \doteq 0{,}70\,.$$

2 body

c) Hledaný poměr je

$$k' = \frac{E_{\mathrm{k1}} - E_{\mathrm{k2}}}{E_{\mathrm{k1}}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{h-h_0}{h} \doteq 0{,}51 = 51\ \%\,.$$

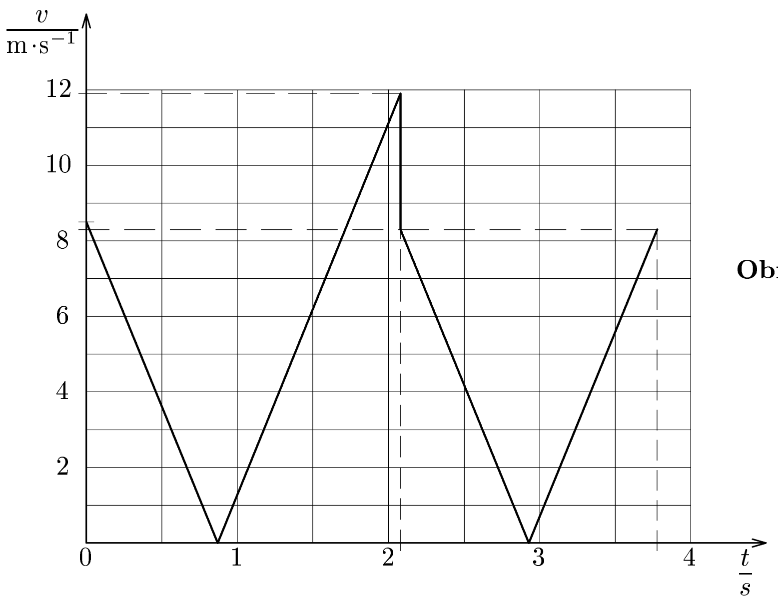
2 body

d) Mezi prvním a druhým odrazem míčku proběhne svislý vrh vzhůru s dobou výstupu

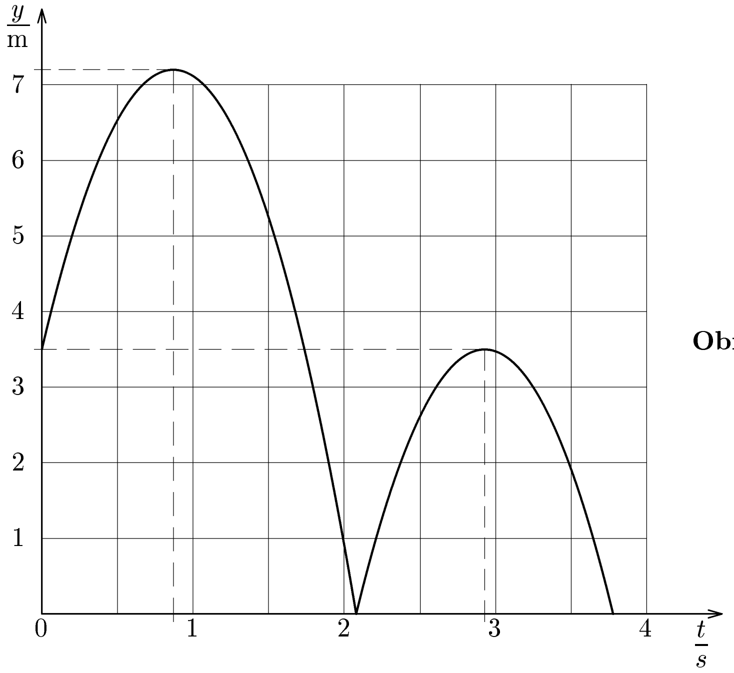
$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \doteq 0{,}85\ \mathrm{s}\,.$$

Stejná bude i doba sestupu.
Pohyb míčku byl střídavě rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený. Během pohybu se velikost rychlosti míčku měnila v závislosti na čase lineárně — graf (obr. R1) je tvořen úsečkami. Výška míčku závisela na čase kvadraticky — graf (obr. R2) je tvořen parabolickými oblouky.

4 body


$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
$\frac{t}{s}$

Obr. R1


$\frac{y}{\mathrm{m}}$
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
$\frac{t}{s}$

Obr. R2

4.a) V časovém intervalu $(0, t_1)$ se lokomotiva pohybuje se zrychlením a_1 a dosáhne rychlosti

$$v_1 = a_1 t_1 = 4{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1 bod

Pak dojde k nepružné srážce. Rychlost u soupravy bezprostředně po srážce určíme užitím zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u\,, \qquad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3{,}6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

2 body

Po srážce je zrychlení a_2 soupravy menší, než zrychlení samotné lokomotivy před srážkou, protože tažná síla lokomotivy je stálá:

$$F = m_1 a_1 = (m_1 + m_2)a_2\,, \qquad a_2 = a_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,.$$

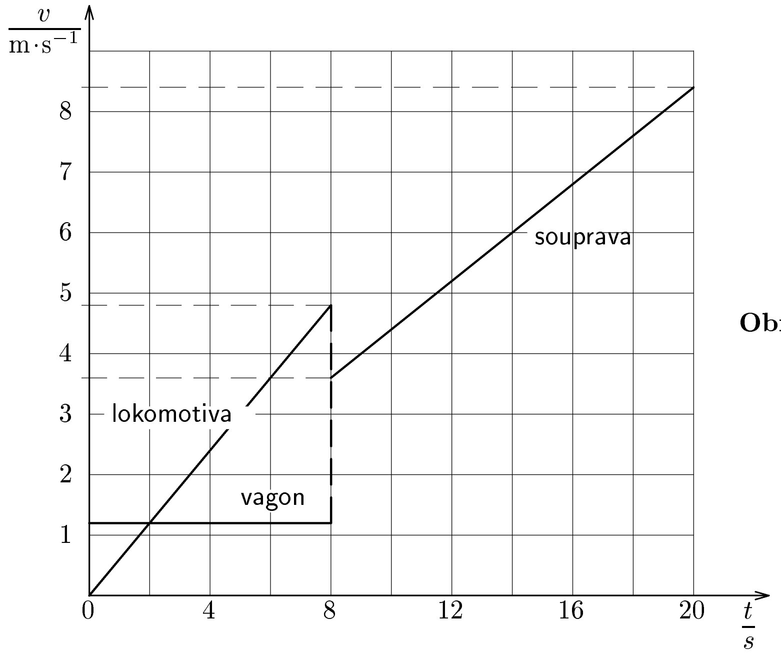
V časovém intervalu $(t_1, t_2\rangle$ se rychlost soupravy zvětší na

$$u_2 = u + a_2(t_2 - t_1) = \frac{m_1 a_1 t_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + a_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}(t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{m_2 v_2 + m_1 a_1 t_2}{m_1 + m_2} = 8{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3 body

b)



Obr. R3

4 body