Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*
Autoři úloh: J. Jírů (1,2,3,5,6,7), I. Volf (4)

1. a) Označme t_1 dobu jízdy na prvním, resp. na třetím, úseku, t_2 dobu jízdy na druhém úseku, s_1 dráhu na prvním, resp. třetím, úseku. Potom platí

$$t_1 = \frac{v}{a}\,, \quad t_2 = \frac{d - 2s_1}{v}\,, \quad \text{kde} \quad s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_2}{2a}\,.$$

Hledaná doba pak je

$$t_{\min} = 2t_1 + t_2 = 2\frac{v}{a} + \frac{d - 2\dfrac{v^2}{2a}}{v} = \frac{v}{a} + \frac{d}{v} = 58\ \text{s}\,.$$

3 body

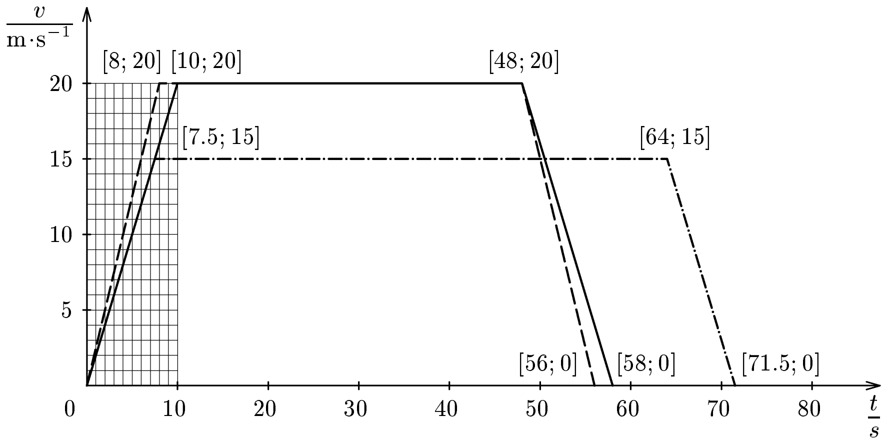
b)
$$t'_{\min} = \frac{v'}{a} + \frac{d}{v'} = 71{,}5\ \text{s}\,.$$

1 bod

c)
$$t''_{\min} = \frac{v}{a'} + \frac{d}{v} = 56\ \text{s}\,.$$

1 bod

d) Graf:



3 body

e) Dráhu uraženou za prvních 10 sekund určíme z grafu jako obsah plochy pod grafem v časovém intervalu $\langle 0\ \text{s}; 10\ \text{s}\rangle$:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\ \text{m} = 100\ \text{m}\,,\\ s' &= \left(\frac{1}{2}\cdot 7,5\cdot 15 + 2,5\cdot 15\right)\ \text{m} = 94\ \text{m}\,,\\ s'' &= \left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 20 + 2\cdot 20\right)\ \text{m} = 120\ \text{m}\,. \end{aligned}$$

2 body

2. a) Pro dobu pohybu do zastavení platí $t_0 = \dfrac{v_0}{a} = 16{,}67\,\mathrm{s} < t_1$.

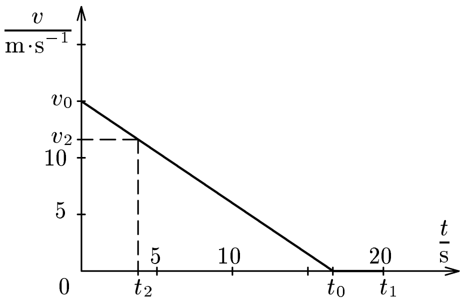
Dráha uražená do zastavení je $s_0 = \dfrac{1}{2}at_0^2$. Po dosazení vychází $s_0 = \dfrac{v_0^2}{2a} = 125\,\mathrm{m}$.
V dalším průběhu času auto stojí a dráha se nemění. Proto $s_1 = s_0 = 125\,\mathrm{m}$.

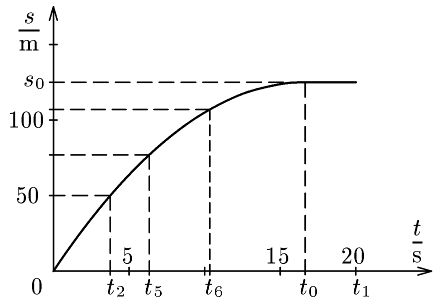
2 body

b) Tabulka pro sestrojení grafů

t/s	0	5	10	15	16,67	20
$v/\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	15	10,5	6	1,5	0	0
s/m	0	63,25	105	123,75	125	125

Grafy:





2 body

c) Čas t_2, ve kterém dráha dosáhne hodnoty s_2, určíme užitím zákona dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu:

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}at_2^2\,,$$

$$t_2 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_2}}{a} = \begin{cases} 29{,}6\,\mathrm{s} \\ 3{,}76\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Úloze vyhovuje menší kořen $t_2 = 3{,}76\,\mathrm{s}$. V tomto čase se bude automobil pohybovat rychlostí $v_2 = v_0 - at_2 = 11{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 body

d) Platí

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \frac{v_0(t_4 - t_3) - \frac{1}{2}a(t_4^2 - t_3^2)}{t_4 - t_3} = v_0 - \frac{1}{2}a(t_4 + t_3) = 7{,}35\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

e) Označme t_5, t_6 počatek a konec hledaného časového intervalu. Platí:

$$\Delta s = v_0(t_6 - t_5) - \frac{1}{2}a(t_6^2 - t_5^2) = v_0 \Delta t - \frac{1}{2}a\Delta t(2t_5 + \Delta t)\,,$$

$$t_5 = \frac{v_0 \Delta t - \Delta s}{a\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = 6{,}33\,\mathrm{s}\,, \qquad t_6 = 10{,}33\,\mathrm{s}\,.$$

Příslušné dráhy jsou $s_5 = 76{,}9\,\mathrm{m}$, $s_6 = 106{,}9\,\mathrm{m}$.

2 body

3. Označme $t_1 = 2$ s, $t_2 = 7$ s, $t_3 = 10$ s, $F_0 = 24$ kN.

a) Obsah plochy pod grafem

$S \mathrel{\widehat{=}} F_0(t_2 - t_1) = 24\,000\ \mathrm{N} \cdot (7-2)\ \mathrm{s} = 120\,000\ \mathrm{N\cdot s} = 120\,000\ \mathrm{kg} \cdot m \cdot s^{-1}$

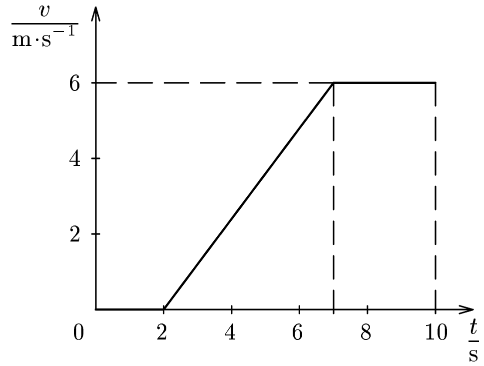
udává v daném časovém intervalu impuls síly, a tedy přírůstek hybnosti.

1 bod

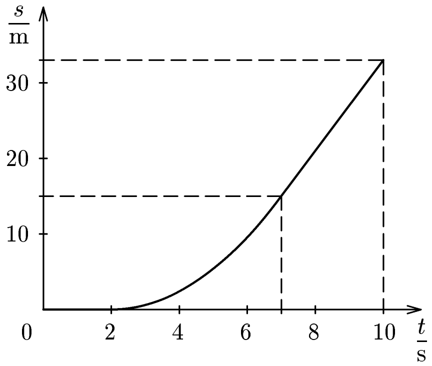
b) Působením síly konstantní velikosti získá tramvaj rovnoměrně zrychleným pohybem konečnou rychlost

$$v = \frac{F_0(t_2 - t_1)}{m} = 6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

s níž se dále pohybuje setrvačností (obr. R1). **2 body**



Obr. R1



Obr. R2

c) Dráha v intervalu $t_1 \leq t < t_2$ je určena vztahem

$$s = \frac{1}{2}a(t - t_1)^2\,, \quad \text{kde} \quad a = \frac{F_0}{m}\,.$$

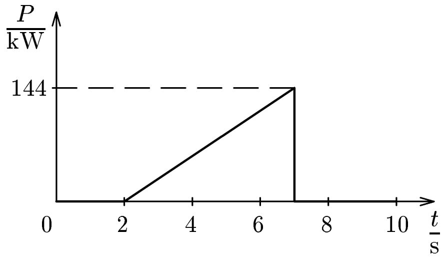
V čase t_2 je dráha

$$s_2 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}(t_2 - t_1)^2 = 15\ \mathrm{m}\,.$$

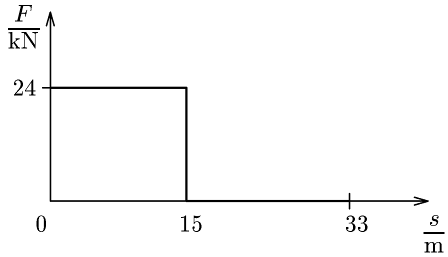
Dráha v intervalu $t_2 \leq t \leq t_3$ je určena vztahem

$$s = v_2(t - t_2) + s_2\,,$$

v čase t_3 je dráha $s_3 = 33$ m. Graf (obr. R2) vyjadřuje obsah plochy pod grafem v úloze b). **3 body**



Obr. R3



Obr. R4

d) Okamžitý výkon je v intervalu $t_1 \le t \le t_2$ přímo úměrný okamžité rychlosti, tj. $P = F_0 v$. V čase t_2 je výkon maximální, $P_2 = F_0 v_2 = 144$ kW (obr. R3).

2 body

e) Síla velikosti F_0 začne působit při nulové dráze a přestane působit v čase $t_2 = 7$ s po projetí dráhy $s_2 = 15$ m (obr. R4).

2 body

4. a) Kámen hozený z výšky h_0 rychlostí o velikosti v_0 vodorovným směrem letěl po dobu

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1{,}43 \text{ s} \qquad (1)$$

a dopadl do vzdálenosti

$$d_0 = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 17{,}1 \text{ m}\,. \qquad (2)$$

2 body

a1) Podle vztahu (2) musí Jirka hodit kámen dvojnásobnou rychlostí, tj.

$$v_0' = 2v_0 = 24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

1 bod

a2) Doba letu v témže tíhovém poli závisí podle vztahu (1) pouze na počáteční výšce, nikoliv na rychlosti, tj.

$$v_0' = v_0 = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

1 bod

a3) Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2$$

plyne pro velikost rychlosti dopadu

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 18{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,. \qquad (3)$$

Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0'^2 = \frac{1}{2}m(2v_\mathrm{d})2$$

plyne pro velikost počáteční rychlosti

$$v_0' = \sqrt{4v_\mathrm{d}^2 - 2gh_0}$$

a po dosazení z rovnice (3) za v_d

$$v_0' = \sqrt{4v_0^2 + 6gh_0} = 34{,}1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

2 body

b) b1) Aby Jirka dohodil stejnou rychlostí v_0 dvakrát dále, musí být doba letu dvojnásobná. Podle vztahu (1) dostaneme rovnici

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,,$$

z níž plyne $h = 4h_0 = 40$ m.

1 bod

b2) Dvojnásobná doba letu bude podle b1) z téže výšky $h = 4h_0 = 40$ m.

1 bod

b3) Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod z výšky h

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(2v_\mathrm{d})^2$$

plyne pro výšku $h = \dfrac{2v_\mathrm{d}}{g} - \dfrac{v_0^2}{2g}$ a po dosazení rovnice (3) za v_d

$$h = \frac{3v_0^2}{2g} + 4h_0 = 62{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

5. a) Na pasažéra ve vozíku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce sedadla $\boldsymbol{F}_1$. V bodě C jsou obě orientovány svisle dolů a jejich složením vzniká výsledná dostředivá síla o velikosti

$$F_\mathrm{d} = mg + F_1 = m\frac{v_B^2}{r}\,.$$

Aby reakce sedadla mohla vzniknout, musí být dostředivá síla větší než síla tíhová. V mezním případě

$$F_1 = 0\,, \qquad F_\mathrm{d} = F_G\,, \qquad m\frac{v_B^2}{r} = mg\,,$$

$$v_B = \sqrt{gr} = 8{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mv_B^2\,, \qquad v_A^2 = 4gr + v_B^2\,.$$

V mezním případě

$$v_A = \sqrt{5gr} = 18{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2 body

c) Maximální dostředivé zrychlení má vozík v místě s maximální okamžitou rychlostí, tedy v nejnižším bodě kružnicové trajektorie. Proto platí

$$a_{\mathrm{dmax}} = \frac{v_A^2}{r} = 49\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Zrychlení směřuje do středu kružnice, tedy svisle vzhůru. **2 body**

d) Pohybuje-li se vozík bez tření a valivého odporu, může mu tečné zrychlení udělit jen složka tíhové síly rovnoběžná s tečnou k trajektorii. Maximální tečné zrychlení na kružnicové trajektorii je v bodech, v nichž tíhová síla má směr tečny ke kružnici, tj. v bodech B a D. Jeho velikost je

$$a_\mathrm{t} = g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Směr tečného zrychlení je v obou bodech totožný se směrem tíhového zrychlení, v bodě B proti směru okamžité rychlosti (vozík zpomaluje) a v bodě D ve směru okamžité rychlosti (vozík zrychluje). **1 bod**

e) Celkové zrychlení je určeno vektorovým součtem tečného a dostředivého zrychlení. Podle úlohy d) v bodech B a D platí $a_\mathrm{t} = g$. Dostředivé zrychlení v bodech B a D je určeno okamžitou rychlostí v těchto bodech, kterou získáme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\cdot r + \frac{1}{2}mv_C^2\,, \qquad v_C^2 = v_A^2 - 2gr = 3gr\,,$$

$$a_\mathrm{d} = \frac{v_C^2}{r} = 3g\,.$$

Celkové zrychlení má velikost

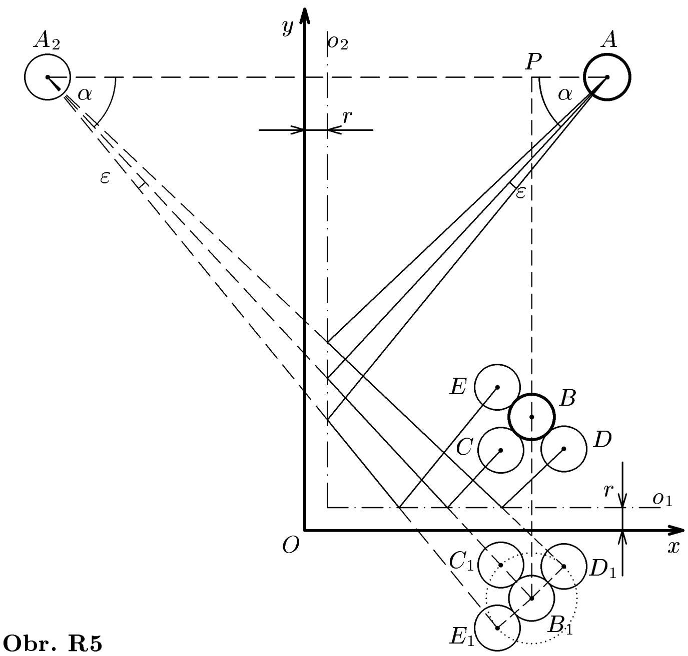
$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{d}^2} = \sqrt{g^2 + (3g)^2} = \sqrt{10}\cdot g = 31\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

a je v obou bodech od normály odchýleno dolů o úhel

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{d}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 18{,}4^\circ\,.$$

3 body

7. a)



Obr. R5

5 bodů

Střed koule se odráží ve vzdálenosti r od mantinelu, pričemž úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Na vnitřní straně mantinelů x, y vedeme ve vzdálenosti r pomocné osy o_1, o_2 (obr. R5). Osové souměrnosti podle těchto os zobrazí první a třetí část trajektorie bodu A do stejné přímky, po které se pohybuje mezi odrazy. Dráhu s uraženou bodem A do centrální srážky v bodě C určíme z pravoúhlého trojúhelníka A_2B_1P:

$$s = |A_2C_1| = \sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2} - 2r = 881\ \mathrm{mm}$$

Ze stejného trojúhelníka určíme i směrový úhel α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_A + y_B - 2r}{x_A + x_B - 2r} = 1{,}0781\,, \qquad \alpha = 47^\circ 9'$$

3 body

b) Maximální odchylku ε od směru určeného v úkolu a), při které se koule A ještě dotkne koule B, určíme z rovnoramenného trojúhelníka $A_2B_1D_1$:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r}{|A_2C_1|} = \frac{r}{\sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2}} = 0{,}03188\,, \qquad \varepsilon = 3^\circ 40'\,.$$

2 body