Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

1. Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, kde $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2$.

a) Dojde k srážce, při níž zůstanou obě tělesa spojena. Určete rychlost soustavy $\boldsymbol{u}$ po srážce vzhledem k vozovce. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1$ a osobního automobilu $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy při srážce. Srážku modelujte nepružným středovým rázem.

b) Dojde ke srážce, při níž nezůstanou vozidla spojena, ale pohybují se rychlostmi $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ vzhledem k vozovce. Byla zjištena hodnota u_1. Určete směr a velikost rychlosti $\boldsymbol{u}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy. Děj modelujte přímým nedokonale pružným středovým rázem.

c) Porovnejte úbytky kinetické energie v případech a) a b) a výsledek diskutujte.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $v_1 = v_2 = 72\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $m_1 = 15\ \mathrm{t}$, $m_2 = 1{,}5\ t$, $u_1 = 54\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

2. Olověná kulička visí na tenkém vlákně.

a) Určete úhel α , o který je nutno napjaté vlákno s kuličkou vychýlit, aby při kývání celkové zrychlení kuličky v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlemí při průchodu rovnovážnou polohou.

b) Určete úhel β, o který je nutno vlákno vychýlit, aby síla napínající vlákno při průchodu rovnovážnou polohou měla dvojnásobnou velikost síly napínající vlákno v krajních polohách.

3. Těleso o hmotnosti m uvolníme ve výšce h nad zemským povrchem. Země má poloměr R a hmotnost M. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie na zemském povrchu, je potenciální energie soustavy Země – těleso ve vzdálenosti h nad povrchem Země dána vztahem:

$$E_\mathrm{p} = \varkappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) .$$

a) Určete rychlost dopadu tělesa na zemský povrch.

b) Určete zrychlení a_1 tělesa na začátku a zrychlení a_2 na konci pohybu.

c) Se stálým zrychlením a_1 by těleso spadlo z výšky h za dobu t_1, se stálým zrychlením a_2 za dobu t_2. Odhadněte skutečnou dobu pádu.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $R = 6{,}38 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$, $h = 2,00 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$. Gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}66 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.

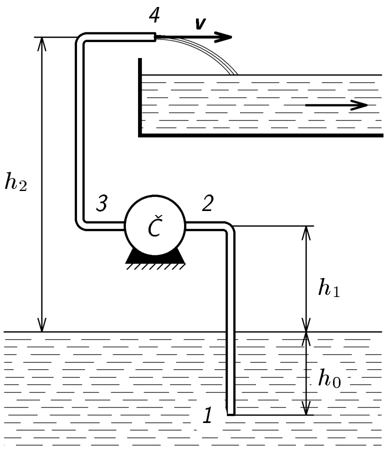
4. Čerpadlo čerpá vodu z řeky potrubím stálého průřezu o plošném obsahu S do koryta zavlažovací soustavy (obr. 1). Objemový průtok vody má stálou hodnotu Q_V. Sací otvor *1* potrubí je ve hloubce h_0 pod hladinou řeky. Vstupní otvor *2* a výstupní otvor *3* čerpadla jsou ve stejné výšce h_1 nad hladinou řeky. Výtokový otvor *4* potrubí je ve výši h_2 nad hladinou řeky. Okolní vzduch má atmosférický tlak p_a.

a) Určete rychlost v proudící vody v potrubí.

b) Jaký tlak by měla voda
v sacím otvoru,
ve vstupním otvoru čerpadla,
ve výstupním otvoru čerpadla
a ve výtokovém otvoru potrubí,
kdyby se chovala jako ideální kapalina?
Návod: Použijte „úplnou“ Bernoulliovu rovnici pro ideální kapaliny:

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = konst\,.$$

Obr. 1



c) S jakým výkonem by v takovém případě čerpadlo pracovalo?

d) Určete výkon P' a účinnost η čerpací jednotky, jestliže ve skutečnosti musí být mezi vstupním a výstupním otvorem čerpadla udržován tlakový rozdíl p_r (větší, než jaký vychází z výpočtu pro ideální kapalinu).

e) Do jaké největší výšky $h_{1\max}$ bychom mohli při daných hodnotách Q_V a S čerpadlo umístit, kdyby se voda chovala jako ideální kapalina?

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $Q_V = 3{,}6\ \mathrm{l \cdot s^{-1}}$, $S = 5{,}0\ \mathrm{cm^2}$,
$g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\varrho = 1000\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $h_0 = 0{,}6\ \mathrm{m}$, $h_1 = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $h_2 = 6{,}2\ \mathrm{m}$,
$p_\mathrm{a} = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $p_\mathrm{r} = 120\ \mathrm{kPa}$.

5. Vzduch v atmosféře se při proudění vzhůru adiabaticky rozpíná a ochlazuje, při proudění dolů se adiabaticky stlačuje a otepluje. V důsledku těchto dějů i v uklidněné atmosféře zakryté mraky teplota vzduchu klesá s rostoucí výškou a vztah mezi atmosférickým tlakem a teplotou je stejný jako při adiabatickém ději.

Za těchto podmínek vypustíme balon stálého objemu V naplněný vodíkem. Tlak vodíku v balonu se během stoupání vyrovnává pojistným ventilem s tlakem okolní atmosféry. Na zemi byl naměřen atmosférický tlak p_1 a teplota t_1. Ve výšce, do které chceme vystoupit, je atmosférický tlak p_2.

a) Jaká je v této výšce teplota vzduchu?

b) Kolik vodíku unikne během výstupu pojistným ventilem do atmosféry?

c) Jak se změní nosnost balonu?

Řešte obecně a pro hodnoty:

$$p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\ t_1 = 20\ {}^\circ\mathrm{C},\ p_2 = 0{,}83 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}, V = 500\ \mathrm{m^3}.$$

Vzduch považujte za plyn s dvouatomovými molekulami, jehož molární hmotnost je $M_\mathrm{m} = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Poissonova konstanta vzduchu i vodíku má hodnotu $\varkappa = 1{,}40$.

6. *Praktická úloha:* **Měření povrchového napětí**

Úlol: Porovnejte povrchové napětí destilované vody a vodního roztoku saponátu.

a) metodou kapilární elevace
b) odtrhovací metodou
c) kapkovou metodou

Měření proveďte při teplotě laboratoře. Povrchové napětí saponátového roztoku změřte při různých koncentracích (1:10 000, 1:1000, 1:100) a výsledky porovnejte. Naměřené povrchové napětí čisté vody porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Pomůcky:

2 skleněné kádinky, saponátový prostředek na nádobí (Jar, Lena apod.), destilovaná voda, kapilára, mikrometr, jehla, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, závaží, stojan, skleněná trubička s nádobkou a kohoutem, závěsný kroužek (nebo kovový rámeček s nataženým drátkem), stoleček nad misku vah.

Provedení úlohy:

a) *Metoda kapilární elevace* je založena na porovnání tíhy G sloupce kapaliny vystouplé v kapiláře a síly F vyvolané povrchovým napětím, která tento sloupec udržuje v určité výšce nad okolní hladinou (obr. 2).

$$G = \pi r^2 h\varrho g\,, \qquad F = 2\pi r\sigma\cos\vartheta\,.$$

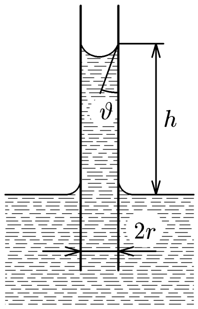
Jelikož úhel smáčení $\vartheta < 10°$, můžeme psát

$$\cos\vartheta \doteq 1\,, \quad F \doteq 2\pi r\sigma\,.$$

Z rovnosti $F = G$ plyne

$$\sigma = \frac{h\varrho g r}{2}\,.$$

Do kádinky naplněné zkoumanou kapalinou ponoříme svisle kapiláru, poněkud ji posuneme nahoru a změříme kapilární elevaci h. Průměr kapiláry $2r$ zjistíme pomocí jehly, kterou zasuneme do kapiláry a v místě označeném při okraji kapiláry změříme mikrometrem.



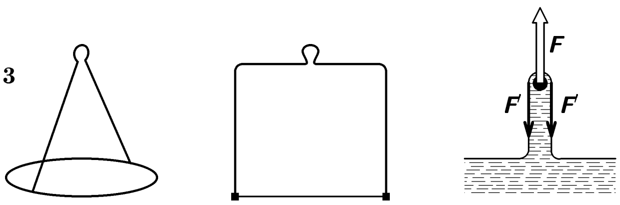
Obr. 2

b) *Odtrhovací metoda* je založena na zjištění síly potřebné k odtržení povrchové blány ulpívající na kroužku (či rovném drátku) délky l vytahovaného z kapaliny, která jej smáčí (obr. 3). Kapalinová blána má dva povrchy a působí tedy silou

$$F = 2\sigma l\,,$$

kterou můžeme určit pomocí laboratorních vah.

Obr. 3



Nad misku vah umístíme můstek s kádinkou, ve které je zkoumaná kapalina, a na konec vahadla zavěsíme kroužek nebo rámeček s drátkem a vyvážíme jej. Hladinu kapaliny v kádince upravíme tak, aby se nacházela asi 2 mm pod vyváženým kroužkem. Vychýlíme-li vahadlo, hladina zachytí kroužek a rovnováha se poruší. Sílu povrchového napětí určíme tárováním. Na druhou misku vah přidáme lehký kalíšek a na něj sypeme zvolna drobná tělíska (táru), až dojde k odtržení kroužku od hladiny vody nebo k vytažení tenkého kapalinového prstence nad hladinu saponátového roztoku. (Jako tárovací tělíska se hodí např. jáhly nebo hořčičné semínko.) Zvážíme hmotnost m samotného kalíšku s tělísky a určíme povrchové napětí

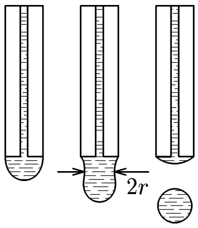
$$\sigma = \frac{mg}{2l}\,.$$

c) *Kapková metoda* měření povrchového napětí spočívá v určení poměru hmotností kapek dvou kapalin (měřené a srovnávací) při znalosti povrchového napětí srovnávací kapaliny. Ze silnostěnné skleněné trubičky necháme *velmi zvolna* odkapat stejný počet N kapek měřené i srovnávací kapaliny. Jejich celkové hmotnosti $M_1,\ M_2$ pak zvážíme.
Tíhová síla působící na kapku v okamžiku odtržení od konce trubičky je rovna síle povrchového napětí:

$$\frac{M_1 g}{N} = 2\pi r\sigma_1 \qquad \frac{M_2 g}{N} = 2\pi r\sigma_2\,,$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{M_2}\sigma_2\,.$$

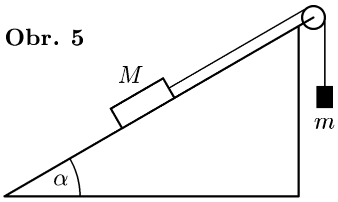
Jako srovnávací kapalinu zvolíme destilovanou vodu.



Obr. 4

7. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α je položen kvádr o hmotnosti M. Těleso s hmotností m je spojeno s kvádrem vláknem vedeným přes pevnou kladku (obr. 5). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je f, součinitel statického tření je f_0. Budeme vyšetřovat tyto případy:

Obr. 5



a) udělíme počáteční rychlost v_0 tělesu o hmotnosti m ve směru svislém dolů,
b) udělíme počáteční rychlost v_0 kvádru ve směru dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou,
c) ponecháme soustavu v klidu.

Pro všechny případy vypočtěte zrychlení soustavy a tahovou sílu vlákna a diskutujte, jak se bude soustava pohybovat.