Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*
Autoři úloh:V. Vícha(1,3,4,5), P. Šedivý (2,6,7)

1. Situaci znázorňuje obr. R1; čas měříme od okamžiku výstřelu. Pro pohyb tělesa platí:

$$x = 0\,, \qquad y = b + v_1 t\,.$$

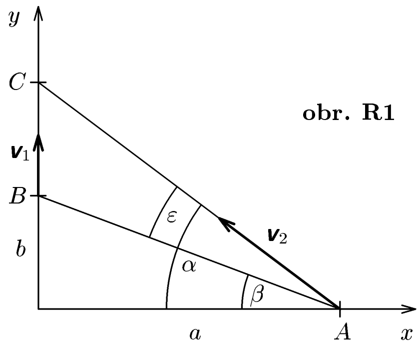
Pro pohyb střely platí:

$$x = a - v_2 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_2 t \sin\alpha\,.$$

V okamžiku zásahu jsou souřadnice tělesa i střely stejné:

$$\begin{aligned} a - v_2 t \cos\alpha &= 0 \\ v_2 t \sin\alpha &= b + v_1 t \end{aligned}$$

5 bodů



obr. R1

Vyloučením času a další úpravou dostaneme kvadratickou rovnici, ve které jako neznámá bude vystupovat $\sin\alpha$:

$$bv_2 \cos\alpha = a(v_2 \sin\alpha - v_1)\,,$$

$$(b^2v_2^2 + a^2v_2^2)\sin^2\alpha - 2a^2 v_1 v_2 \sin\alpha + a^2v_1^2 - b^2v_2^2 = 0\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{a^2 v_1 \pm b\sqrt{b^2v_2^2 + a^2v_2^2 - a^2v_1^2}}{v_2(a^2+b^2)}\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen $\sin\alpha = 0{,}57315\,, \quad \alpha = 34^\circ 58'$. Současně

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0{,}31623\,, \quad \beta = 18^\circ 26'\,.$$

Pušku tedy musíme „předsadit" o úhel

$$\varepsilon = \alpha - \beta \doteq 16^\circ 30'\,.$$

5 bodů

2. a, b) Na cyklistu, který jede bez šlapání, má dynamický účinek pohybová složka tíhové síly a odpor vzduchu, pro který platí Newtonův vztah $F_\mathrm{o} = 0{,}5 \cdot CS\varrho v^2$, kde v je relativní rychlost tělesa vůči vzduchu. Po dosažení mezní rychlosti se účinky obou sil ruší. Za bezvětří

$$mg\sin\alpha = 0{,}5 \cdot CS\varrho v_1^2 = Kv_1^2\,.$$

$K = \dfrac{mg\sin\alpha}{v_1^2}$ je konstanta úměrnosti v Newtonově vztahu daná hustotou vzduchu, rozměry a tvarem cyklisty. Pro dané hodnoty $K = 0{,}278\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Při jízdě po větru

$$mg\sin\alpha = K(v_2 - v_\mathrm{v})^2\,,$$

při jízdě proti větru

$$mg\sin\alpha = K(v_3 + v_\mathrm{v})^2\,.$$

Porovnáním dostáváme

$$v_2 = v_1 + v_\mathrm{v}\,, \qquad v_3 = v_1 - v_\mathrm{v}\,.$$

Pro dané hodnoty $v_2 = 15{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 57\ \mathrm{km/h}$, $v_3 = 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 21\ \mathrm{km/h}$.

3 body

c) Při šlapání s kopce platí při rovnoměrném pohybu rychlostí v_4

$$mg\sin\alpha + F_1 = Kv_4^2 = \frac{mg\sin\alpha}{v_1^2}v_4^2\,, \qquad F_1 = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^2}{v_1^2} - 1\right)\,,$$

kde F_1 je velikost síly, kterou cyklista vyvinul šlapáním; pro dané hodnoty $F_1 = 29{,}9\ \mathrm{N}$. Cyklista šlape s výkonem

$$P = F_1 v_4 = Kv_4^3 - v_4 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^3}{v_1^2} - v_4\right)\,.$$

Pro dané hodnoty $P = 449\ \mathrm{W} \doteq 450\ \mathrm{W}$.

3 body

d) Při rovnoměrné jízdě do kopce rychlostí v_5 musí cyklista vyvinout sílu o velikosti

$$F_2 = Kv_5^2 + mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^2}{v_1^2} + 1\right)$$

a pro jeho výkon platí

$$P = F_2 v_5 = Kv_5^3 + v_5 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^3}{v_1^2} + v_5\right)\,.$$

Dostáváme rovnici třetího stupně s neznámou v_5. Po dosazení číselných hodnot a numerickém řešení dostaneme $v_5 = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31\ \mathrm{km/h}$.

4 body

3. a) Dusík je plyn s dvouatomovými molekulami. Proto $M_\mathrm{m} = 28\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$. Plyn měl počáteční objem

$$V_1 = \frac{mR_\mathrm{m}T_1}{p_1 M_\mathrm{m}} = 4{,}35\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 4{,}35\ \mathrm{l}\,.$$

Izotermický děj:

$$T_2 = T_1 = 293\ \mathrm{K}\,, \quad p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 0{,}435\ \mathrm{MPa}\,,$$

Adiabatický děj:

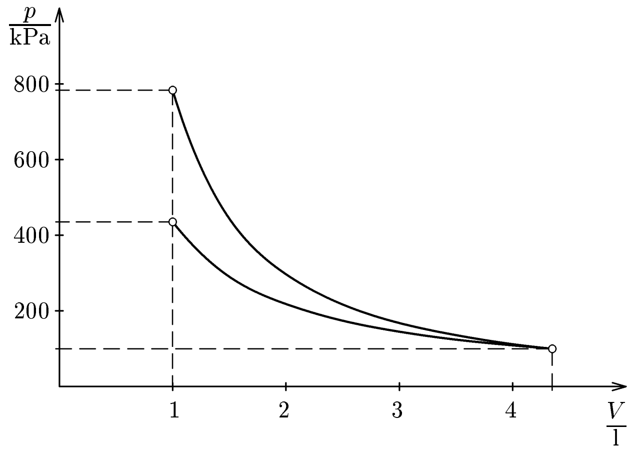
$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = 0{,}784\ \mathrm{MPa}\,, \quad T_2 = \frac{T_1 p_2 V_2}{p_1 V_1} = 528\ \mathrm{K}\,, \quad t_2 = 255\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body

b)

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Izotermický děj:} & \{p\} = & \dfrac{435}{\{V\}} \\[2ex] \text{Adiabatický děj:} & \{p\} = & \dfrac{784}{\{V\}^{1,4}} \end{array}\right\} \quad V \ldots \text{v litrech}, \quad p \text{ v kPa}$$

	$\frac{V}{\mathrm{l}}$	4,35	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00	1,50	1,00
izot.	$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	100	109	124	145	174	218	290	435
adiab.	$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	100	113	136	168	217	297	444	784



4 body

c) Při izotermickém stlačení plyn spotřeboval práci

$$W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 640 \text{ J}$$

Při adiabatickém ději plyn spotřeboval práci

$$W_2 = \Delta U = 2{,}5 n R_\mathrm{m} (T_2 - T_1) = 2{,}5 \frac{m R_\mathrm{m}}{M_\mathrm{m}} (T_2 - T_1) = 871 \text{ J}$$

Obě práce můžeme také číselně určit z obsahů ploch omezených grafy z úkolu b).

3 body

4. a) Frekvence základního tónu struny je vyjádřena vztahem

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}\,.$$

Úpravou dostaneme $\sigma = 4l^2 f_1^2 \varrho = 979 \text{ MPa}\,.$ **3 body**

b) Při napínání struny dojde k jejímu prodloužení podle Hookova zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E\,.$$

Zahřátím se struna délky l prodlouží o $\Delta_t l = l \alpha \Delta t$ a o tuto hodnotu se tedy zmenší deformace tahem. Napětí struny se zmenší na

$$\sigma' = \frac{\Delta l - \Delta_t l}{l} E = \sigma - E\alpha\Delta t = 979 \text{ MPa} - 26 \text{ MPa} = 953 \text{ MPa}$$

a frekvence struny poklesne na $f_1' = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma'}{\varrho}} = 434 \text{ Hz}\,.$ **7 bodů**

5. a) Počáteční náboj na kondenzátoru A bude $Q = C_\mathrm{A}U$. Po připojení k přepínači přejde část náboje na kondenzátor B:

$$Q = C_\mathrm{A}U = Q_\mathrm{A0} + Q_\mathrm{B0} = (C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})U_0\,, \qquad U_0 = \frac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = 12\,\mathrm{V}\,.$$

1 bod

b) Vodiči projde náboj

$$Q_\mathrm{B0} = C_\mathrm{B}U_0 = \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}U = 3{,}6\,\mu\mathrm{C}\,.$$

1 bod

c) Vnitřní energie vodičů se zvětší o hodnotu, o kterou se zmenší elektrická energie kondenzátorů:

$$-\Delta E = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}U^2 - \left(\frac{1}{2}C_\mathrm{A}U_0^2 + \frac{1}{2}C_\mathrm{B}U_0^2\right) = \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}U^2}{2(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})} = 54\,\mu\mathrm{J}\,.$$

2 body

d) Po přepnutí se spojí kladná deska jednoho kondenzátoru se zápornou deskou druhého. Tím se náboje částečně zneutralizují a celkový náboj se zmenší:

$$|Q_1| = |Q_\mathrm{A0} - Q_\mathrm{B0}|\,, \qquad U_1 = \frac{|Q_1|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{Q}{(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})^2}|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}| = 2{,}4\,\mathrm{V}\,.$$

2 body

e) Po n-tém přepnutí bude platit:

$$U_n = \frac{|Q_n|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{|C_\mathrm{A}U_{n-1} - C_\mathrm{B}U_{n-1}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}U_{n-1}\,.$$

Dostáváme rekurentní vyjádření geometrické posloupnosti $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, která má:

$$\text{nultý člen} \quad U_0 = \frac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \quad \text{a kvocient} \quad q = \frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}\,.$$

n-tý člen posloupnosti je

$$U_n = U_0 q^n = \frac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}\left(\frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}\right)^n\,.$$

Při každém přepnutí se změní polarita napětí na kondenzátoru s menší kapacitou, zatímco na kondenzátoru s větší kapacitou je stále stejná.

2 body

f) Nerovnici

$$U_k > \frac{C_\mathrm{A} U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \left(\frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \right)^n$$

řešíme logaritmováním:

$$n > \frac{\log \dfrac{(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}) U_k}{C_\mathrm{A} U}}{\log \dfrac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}} \doteq 2{,}97 \, .$$

Při třetím přepnutí už napětí klesne pod hodnotu $U_k = 0{,}1\,\mathrm{V}$.

2 body

6. a) V zapojení podle obr. Y byly na diodě KY710 naměřeny hodnoty:

$t/^\circ\mathrm{C}$	0	71,5
u_D/V	0,543	0,366

Úpravou vztahu (1) a dosazením dostáváme:

$$\gamma = \frac{U_0 - u_\mathrm{D}}{t} = 2{,}48\,\mathrm{mV}/K \, .$$

b) První operační zesilovač pracuje v lineárním režimu a na invertujícím vstupu se udržuje nulové napětí. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu, že proud přicházející přes diodu je stejný jako proud odcházející přes rezistor R_1. Proto:

$$i_\mathrm{D} = \frac{U_\mathrm{B}}{R_1} = 1\,\mathrm{mA} = \mathrm{konst.} \qquad u_{\mathrm{o}1} = u_\mathrm{D} = U_0 - \gamma t.$$

c) Také druhý operační zesilovač pracuje v lineárním režimu. Proto je napětí na invertujícím vstupu nulové a výstupní napětí $u_{\mathrm{o}2}$ je stejné jako napětí na rezistoru R_4. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu:

$$\frac{u_{\mathrm{o}2}}{R_4} + \frac{u_{\mathrm{o}1}}{R_1} = \frac{u_{\mathrm{o}2}}{R_4} + \frac{U_0 - \gamma t}{R_1} = \frac{U_\mathrm{B}}{R_3} \, , \qquad u_{\mathrm{o}2} = \frac{\gamma t R_4}{R_2} + \frac{U_\mathrm{B} R_4}{R_3} - \frac{U_0 R_4}{R2} \, .$$

Má-li současně platit $u_{\mathrm{o}2} = Bt$, musí být:

$$R_3 = R_2 \frac{U_b}{U_0} \, , \quad R_4 = R_2 \frac{B}{\gamma} \, . \qquad \text{Po dosazení:} \quad R_3 \doteq 28\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 \doteq 40\,\mathrm{k\Omega}.$$

Tyto výsledky ovšem bereme jen jako orientační a při praktické realizaci teploměru v úloze d) nastavíme R_3 a R_4 podle chování výstupního voltmetru.

7. Označme $u^\star$ výstupní napětí prvního operačního zesilovače, který funguje jako neinvertující zesilovač (obr. RB2). Platí tedy

$$u^\star = u_{i1}\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) .$$

2 body

U druhého operačního zesilovače se vlivem zpětné vazby udržuje vstupní difrenciální napětí na zanedbatelné hodnotě. Napětí na invertujícím vstupu je proto prakticky stejné jako u_{i2}. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí

$$\frac{u^\star - u_{i2}}{R} = \frac{u_{i2} - u_o}{R_2} .$$

3 body

Vyloučením $u^\star$ a úpravou dostáváme

$$u_o = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) u_{i2} - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \frac{R_2}{R} u_{i1} .$$

Současně má platit

$$u_o = 10\,(u_{i2} - u_{i1}) .$$

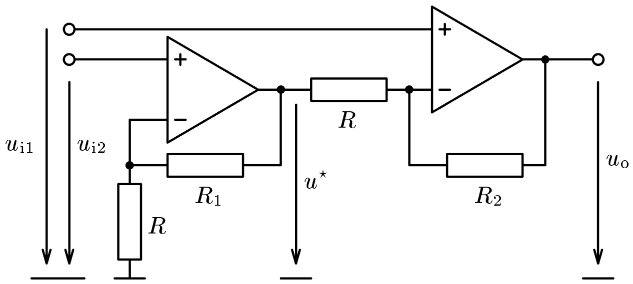
3 body

Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$1 + \frac{R_2}{R} = 10 , \qquad R_2 = 9R = 90\ \mathrm{k\Omega} ,$$

$$\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \frac{R_2}{R} = 9\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) = 10 , \qquad R_1 = \frac{R}{9} = 1{,}11\ \mathrm{k\Omega} .$$

2 body



Obr. R2