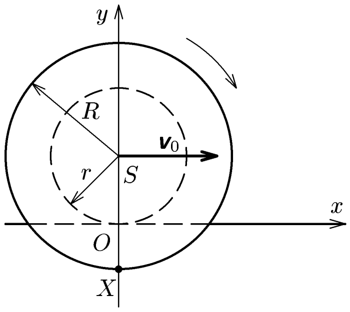
Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Na vodorovné podložce se rovnoměrně odvaluje válec o poloměru $r = 30\,\mathrm{cm}$. Osa válce se pohybuje rychlostí $v_0 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na podstavu válce je připevněno kolo o poloměru $R = 50\,\mathrm{cm}$, které přesahuje přes okraj podložky. Osy obou těles jsou totožné.



Obr. 1

a) Napište parametrické rovnice trajektorie bodu X na obvodu kola. Počáteční polohu bodu a vztažnou soustavu zvolte podle obr. 1.

b) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice rychlosti a velikost rychlosti bodu X. Určete velikost rychlosti v nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie.

c) Bod X se střídavě pohybuje vpřed a vzad. Určete, v jakém poměru jsou doby trvání těchto pohybů.

d) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice a velikost zrychlení bodu X.

e) V okolí nejnižších a nejvyšších bodů trajektorie můžeme pohyb bodu X popsat přibližně jako rovnoměrný pohyb po kružnici. Určete poloměry příslušných oskulačních kružnic.

f) Trajektorii bodu X narýsujte v měřítku 1:10 na list papíru formátu A4.

2. Z určitého místa budeme házet kamenem. Počáteční rychlost kamene bude mít pokaždé stejnou velikost v_0, elevační úhel α budeme měnit. Všechny hody budou probíhat v téže svislé rovině. Je-li kámen dostatečně velký, můžeme zanedbat odpor vzduchu a předpokládat, že trajektorie kamene je parabola.

a) Určete množinu vrcholů všech těchto parabol.

b) Určete hranici oblasti, kterou můžeme kameny zasáhnout.

c) Výsledky úloh a), b) znázorněte graficky ve vhodném měřítku spolu s několika trajektoriemi pro různé elevační úhly. Volte $v_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

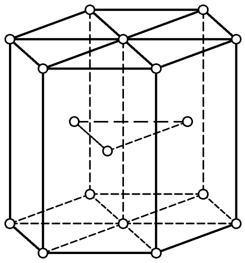
3. a) Trubice o vnějším průměru D a vnitřním průměru d vyrobená ze skla o indexu lomu n je naplněna obarvenou tekutinou. Určete zdánlivé zvětšení vnitřního průměru trubice v důsledku lomu světla.

b) Ze stejného skla je vyrobena tyč kruhového průřezu o průměru D, na kterou po jedné straně narýsujeme tenkou podélnou čáru. Určete zdánlivé zvětšení čáry při pohledu z protější strany.

Úlohu řešte obecně a pro $n = 1{,}52$ (relativní index lomu vzhledem ke vzduchu). Vnější průměry trubice a tyče jsou malé ve srovnání s konvenční zrakovou dálkou.

4. Při výkladu fyzikálních vlastností kovů se často používají modely krystalových struktur, ve kterých atomy, jako vzájemně se dotýkající koule, vytvářejí prostorovou mřížku. O kovech je známo, že většina krystaluje v některém z třech typů mřížek:

- prostorově centrované kubické mřížce (např. Li, Na, Cr, αFe, δFe),
- plošně centrované kubické mřížce (např. Cu, Ag, Ni, Pd, γFe),
- hexagonální mřížce, jejíž model je znázorněn na obr. 2 (např. Mg, Zn, Cd, Os).



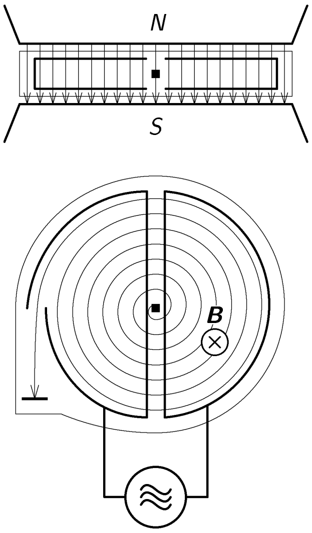
Obr. 2

Zaplnění prostoru krystalové mřížky atomy můžeme vyjádřit *koeficientem zaplnění* $f = \dfrac{V}{V_0}$, kde V_0 je objem celé elementární buňky a V je objem její části, kterou zaplňují atomy.

a) Popište a znázorněte rozmístění atomů a určete koeficient zaplnění v krystalech sodíku, stříbra a hořčíku.

b) Určete poloměry atomů uvedených kovů, znáte-li jejich relativní atomové hmotnosti $A_{\mathrm{r\,Na}} = 22{,}990$, $A_{\mathrm{r\,Ag}} = 107,87$, $A_{\mathrm{r\,Mg}} = 24,305$
a hustoty $\varrho_{\mathrm{Na}} = 971\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Ag}} = 10\,500\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Mg}} = 1\,740\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

5. K urychlování nabitých částic, zejména protonů, deuteronů a helionů (částic α) byl r. 1931 sestrojen první kruhový urychlovač – *cyklotron*. Jeho schéma je na obr. 3. Mezi póly silného elektromagnetu, který vytváří homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$, se ve vakuové komoře nacházejí dvě půlválcové urychlovací elektrody, tzv. duanty, připojené ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí o amplitudě U_{m} a frekvenci f. Částice vznikající úplnou ionizací molekul plynu (vodíku, deuteria nebo helia) přiváděného do zdroje iontů, který je umístěn uprostřed vakuové komory, mají klidovou hmotnost m_0 a náboj Ze. Uvnitř duantů se pohybují po kruhové trajektorii a při každém průchodu mezerou mezi duanty jsou urychleny elektrickým polem. Výsledný pohyb probíhá po spirále až do průchodu výstupním otvorem v jednom z duantů, za kterým částice dopadají na vhodný terčík. Cyklotrony se dodnes využívají pro náročné fyzikální experimenty a pro přípravu důležitých radionuklidů.



Obr. 3

Vaším úkolem je dopočítat základní parametry cyklotronu, který má sloužit k urychlení deuteronů ($m_0 = 3{,}34\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $Z = 1$) na kinetickou energii

$E_k = 15{,}0\,\mathrm{MeV}$. Magnetická indukce v komoře má velikost $B = 1{,}40\,\mathrm{T}$. Vysokofrekvenční napětí duantů má amplitudu $U_m = 160\,\mathrm{kV}$.

a) Porovnejte klidovou a kinetickou energii deuteronů a ověřte, že v prvním přiblížení můžeme jejich hmotnost považovat za konstantní (rovnou m_0). Za tohoto předpokladu řešte nerelativisticky úkoly b) až d).

b) Princip cyklotronu vychází z poznatku, že frekvence, se kterou částice stálé hmotnosti obíhá po kruhové trajektorii kolmo k indukčním čarám v homogenním magnetickém poli, nezávisí na poloměru trajektorie. Stejnou frekvenci musí mít napětí přivedené na duanty. Určete její hodnotu pro náš cyklotron.

c) Urychlení proběhne optimálním způsobem, když při každém průchodu částice mezerou mezi duanty je na nich právě napětí U_m. Kolik oběhů v takovém případě částice vykoná, než vyletí výstupním okénkem?

d) Jakou rychlost deuterony získají a jaký bude poloměr poslední kruhové trajektorie?

e) Relativistické zvětšení hmotnosti částice během urychlení omezuje použití cyklotronu do energií řádově desítek MeV. Určete relativisticky, s přihlédnutím ke zvětšení hmotnosti částice, rychlost vyletujících deuteronů, poloměr poslední kružnice a příslušnou frekvenci obíhání. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými v b) a d).

6. *Praktická úloha:* **Měření indukčnosti cívky**

Úkoly:

a) Sestavte obvod podle obr. 4. Použijte zdroje o napětí přibližně 5 V (např. plochou baterii), cívku 1200 závitů z rozkladného transformátoru, výkonovou diodu, stejnosměrný ampérmetr, stejnosměrný voltmetr, kvalitní kondenzátor o kapacitě alespoň $8\,\mu\mathrm{F}$ (ne elektrolytický) a páčkový spínač. Měření proveďte:

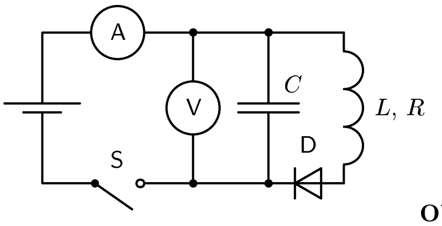
- na cívce s uzavřeným jádrem,
- na cívce s rovným jádrem,
- na cívce bez jádra.

Kapacitu kondenzátoru změřte některou běžnou metodou (např. pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu střídavého proudu). Voltmetr by měl mít co největší odpor a rozsahy např. 20 V a 200 V.

b) Při sepnutém spínači změřte proud I procházející cívkou a napětí U_1 na kondenzátoru. Pak přepněte voltmetr na vyšší rozsah (používáte-li ručkový přístroj, změňte také jeho polaritu) a rozepněte spínač. Dojde k překmitnutí obvodu LC a na kondenzátoru se objeví velké napětí opačné polarity, které se bude zvolna zmenšovat v důsledku vybíjení kondenzátoru přes voltmetr. Změřte napětí U_2 bezprostředně po rozepnutí spínače.
Pro každý typ cívky měření několikrát zopakujte .

c) Odvoďte vztah pro výpočet indukčnosti cívky z kapacity C kondenzátoru, napětí U_1, U_2 a proudu I. Ztráty energie během překmitnutí na odporu cívky a na diodě zanedbejte.

d) Vypočtěte indukčnosti cívky s uzavřeným jádrem, s rovným jádrem a bez jádra.



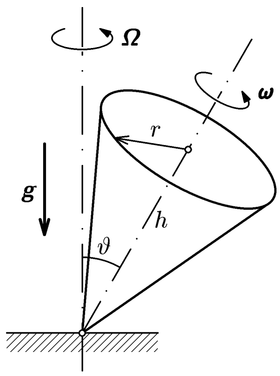
Obr. 4

7. Je dán homogenní rotační kužel hmotnosti m o poloměru základny r a výšce h.

a) Vypočtěte vzdálenost těžiště kužele od jeho vrcholu. Příslušný vzorec odvoďte.

b) Vypočtěte moment setrvačnosti kužele vzhledem k ose souměrnosti. Příslušný vzorec odvoďte.

c) Kužel postavíme na špičku tak, že jeho osa souměrnosti bude odkloněna od svislice o ostrý úhel ϑ a udělíme mu rotaci úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ okolo osy souměrnosti (obr. 5). Vypočtěte úhlovou rychlost $\boldsymbol{\Omega}$ precese užitím přibližné teorie (tj. zanedbáním příspěvku precesního pohybu k momentu hybnosti).



Obr. 5

Řešte obecně a pak numericky pro $m = 3{,}00$ kg, $r = 0{,}100$ m, $h = 0{,}200$ m, $\omega = 300\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

1. Ve vodorovné rovině je zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava Oxy. Na ose x je bod $A[a; 0]$, ve kterém se nachází puška. Na ose y je bod $B[0; b]$. Z počátku soustavy souřadnic se směrem k bodu B pohybuje těleso stálou rychlostí v_1. V okamžiku, kdy těleso prochází bodem B, vystřelíme. O jaký úhel je třeba „předsadit“ pušku, aby těleso bylo zasaženo? Vzdálenost bodů A, B je tak malá, že pohyb střely můžeme považovat za přímočarý s konstantní rychlostí v_2. Těleso považujte za hmotný bod. Řešte pro hodnoty $a = 60$ m, $b = 20$ m, $v_1 = 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2. Cyklista, jehož hmotnost i s kolem je 95 kg, sjíždí bez šlapání po dlouhém svahu s klesáním 3,5 m na 100 m dráhy. Za bezvětří dosáhne rychlosti $v_1 = 39$ km/h.

a) Jaké rychlosti v_2 by dosáhl, kdyby ve směru jízdy foukal vítr o rychlosti $v_\mathrm{v} = 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

b) Jaké rychlosti v_3 by dosáhl, kdyby stejně silný vítr foukal proti směru jízdy?

c) S jakým výkonem by musel cyklista šlapat za bezvětří, aby při sjíždění po témž svahu dosáhl rychlosti $v_4 = 54$ km/h?

d) Jaké rychlosti v_5 dosáhne, bude-li za bezvětří se stejným výkonem šlapat do téhož svahu, po kterém sjížděl v úlohách a) až c)?

Úlohy a, b, c) řešte nejprve obecně a potom pro dané hodnoty. V úloze d) postačí numerické řešení některou přibližnou metodou. Valivý odpor kol považujte za zanedbatelný v porovnání s odporem vzduchu, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3. Dusík o hmotnosti m má počáteční tlak p_1 a teplotu t_1. Stlačíme jej na objem V_2 A) izotermicky, B) adiabaticky.

a) Určete pro každý děj tlak a teplotu po stlačení.

b) Nakreslete ve vhodném měřítku oba děje do téhož p-V diagramu, přičemž každý graf určete alespoň 8 body.

c) Vypočtěte pro oba děje práci spotřebovanou plynem během stlačení.

Řešte obecně a pro hodnoty: $m = 5{,}00$ g, $p_1 = 0{,}100$ MPa, $t_1 = 20$ °C, $V_2 = 1{,}00$ l, $\varkappa = 1{,}40$, $A_\mathrm{r}(N) = 14{,}0$, $R_\mathrm{m} = 8{,}314\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

4. a) Ocelová struna piana naladěná na základní tón a^1 o frekvenci $f = 440$ Hz má délku 40 cm. Určete normálové napětí struny. Víme, že fázová rychlost příčného vlnění na struně je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

kde σ je normálové napětí struny a $\varrho = 7900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota materiálu, ze kterého je struna vyrobena.

b) Struny piana jsou napnuty na masivním litinovém rámu. Přeneseme-li piano ze studeného prostředí do vyhřáté místnosti, dojde k jeho rozladění, protože tenké struny se rychle zahřejí na teplotu místnosti, zatímco rám se bude ohřívat jen zvolna. Jak se změní frekvence základního tónu struny z úlohy a), zvýší-li se její teplota o 10 K a teplota rámu se nezmění? Teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, Youngův modul pružnosti v tahu $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa.

5. Kondenzátor o kapacitě C_A nabijeme na napětí U, pak jej odpojíme od zdroje a připojíme ke spřaženému přepínači, ke kterém je již připojen kondenzátor o kapacitě C_B (obr. 1).

a) Určete napětí na kondenzátorech po připojení kondenzátoru o kapacitě C_A k přepínači.

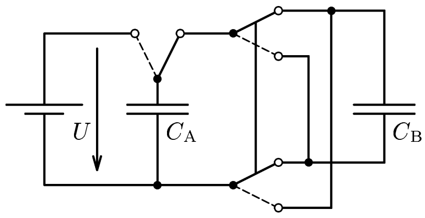
b) Jak velký náboj Q prošel vodiči po připojení kondenzátoru k přepínači?

c) Jak velká energie se přitom přeměnila na vnitřní energii vodičů?

d) Určete napětí U_1 na kondenzátorech po jednom přepnutí přepínače.

e) Na jakou hodnotu klesne napětí na kondenzátorech po n přepnutích?

f) Po kolika přepnutích klesne napětí pod hodnotu U_k?



Obr. 1

Řešte obecně a pro hodnoty: $C_\mathrm{A} = 200\,\mathrm{nF},\ C_\mathrm{B} = 300\,\mathrm{nF},\ U = 30\,\mathrm{V},\ U_\mathrm{k} = 0{,}1\,\mathrm{V}$.

6. *Praktická úloha:* **Elektronický teploměr s diodovým čidlem**

Teorie:

Udržujeme-li v křemíkové diodě zapojené v propustném směru malý stálý proud, při kterém se teplota přechodu PN neliší od teploty okolí, je napětí na diodě lineární klesající funkcí teploty, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$u_\mathrm{D} = U_0 - \gamma t\,. \tag{1}$$

Lineární závislost napětí diody na teplotě se využívá v elektronických teploměrech zapojených podle obr. 2. První operační zesilovač pracuje jako zdroj stálého proudu pro diodu. Napětí voltmetru zapojeného na výstup druhého operačního zesilovače je přímo úměrné Celsiově teplotě:

$$u_\mathrm{o2} = Bt\,. \tag{2}$$

Toho se dosáhne vhodným seřízením odporů R_3 (nastavení nuly) a R_4 (nastavení citlivosti B).

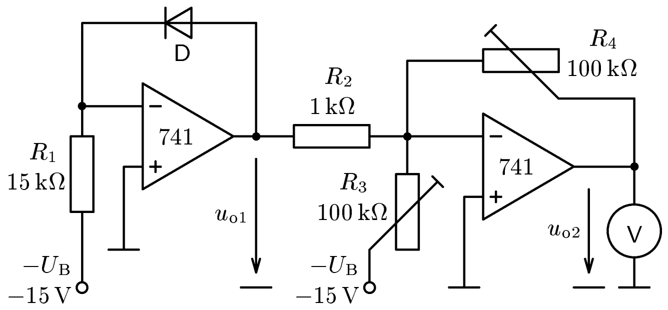
Úkoly:

a) V obvodu sestaveném podle obr. 3 udržujte stálý proud 1 mA. Změřte napětí na diodě při teplotě 0 °C (v termosce se směsí ledu a vody) a při teplotě okolo 80 °C (v termosce s horkou vodou). Z naměřených hodnot určete veličiny U_0 a γ ve vztahu (1).

b) Vysvětlete činnost prvního operačního zesilovače v zapojení podle obr. 2.

c) Vysvětlete činnost druhého operačního zesilovače v zapojení podle obr. 2. Jak musíme nastavit hodnoty odporů R_3 a R_4 aby platil vztah (2), přičemž $B = 0{,}1\,\mathrm{V/K}$? (Při teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$ je $u_{o2} = 0\,\mathrm{V}$ a při teplotě $100\,^\circ\mathrm{C}$ je $u_{o2} = 10\,\mathrm{V}$.)

d) Realizujte zapojení podle obr. 2 a proveďte nastavení odporu R_3 při teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$ a odporu R_4 při teplotě varu vody. Tu určete z barometrického tlaku pomocí MFCh tabulek. Teploměr potom vyzkoušejte porovnáním s jiným přesným teploměrem při teplotách okolo $25\,^\circ\mathrm{C}$, $50\,^\circ\mathrm{C}$ a $75\,^\circ\mathrm{C}$. Z naměřených hodnot sestrojte kalibrační křivku znázorňující závislost u_{o2} na teplotě.

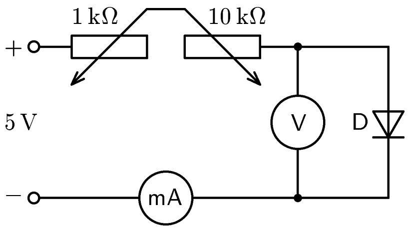


Obr. 2

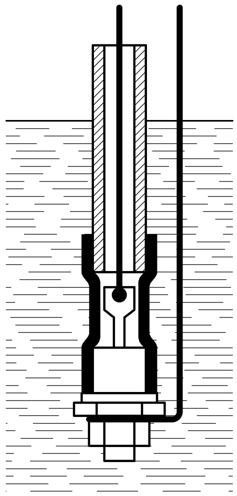
Poznámky k provedení:

Podle možností použijeme buď dvojitý operační zesilovač typu 1458 nebo dva samostatné OZ typu 741. Diodu zvolíme ve větším provedení s kovovým pouzdrem (např. KY710 nebo KY701). Odizolování jednoho vývodu diody od lázně lze provést skleněnou trubičku a kouskem průhledné hadičky pro přívod benzinu do karburátoru nebo kouskem silnější pryžové hadičky (obr. 4).

Pro snadnější nastavení odporů R_3 a R_4 by bylo vhodné použít kombinaci pevného rezistoru a trimru o menším odporu. (Při volbě součástek vycházet z výsledků úlohy c.)



Obr. 3



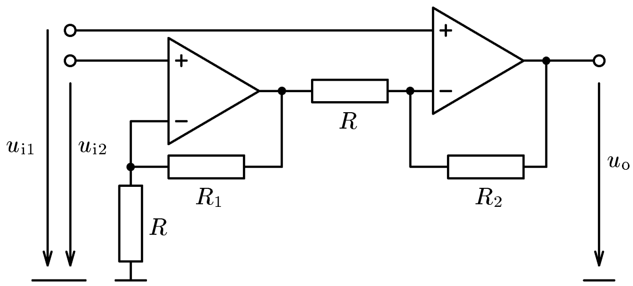
Obr. 4

7. Na obr. 5 je schéma rozdílového zesilovače s velkým vstupním odporem, ve kterém jsou použity dva operační zesilovače a dva stejné rezistory o odporu R. Určete odpory R_1 a R_2 zbývajících rezistorů tak, aby platilo

$$u_\mathrm{o} = 10\,(u_\mathrm{i2} - u_\mathrm{i1})\ .$$

Vstupní diferenciální napětí a vstupní proudy operačních zesilovačů jsou zanedbatelné (viz studijní text).

Řešte obecně a pro $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$.



Obr. 5

Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

1. Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, kde $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2$.

a) Dojde k srážce, při níž zůstanou obě tělesa spojena. Určete rychlost soustavy $\boldsymbol{u}$ po srážce vzhledem k vozovce. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1$ a osobního automobilu $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy při srážce. Srážku modelujte nepružným středovým rázem.

b) Dojde ke srážce, při níž nezůstanou vozidla spojena, ale pohybují se rychlostmi $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ vzhledem k vozovce. Byla zjištena hodnota u_1. Určete směr a velikost rychlosti $\boldsymbol{u}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy. Děj modelujte přímým nedokonale pružným středovým rázem.

c) Porovnejte úbytky kinetické energie v případech a) a b) a výsledek diskutujte.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $v_1 = v_2 = 72\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $m_1 = 15$ t, $m_2 = 1{,}5\ t$, $u_1 = 54\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

2. Olověná kulička visí na tenkém vlákně.

a) Určete úhel α , o který je nutno napjaté vlákno s kuličkou vychýlit, aby při kývání celkové zrychlení kuličky v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlemí při průchodu rovnovážnou polohou.

b) Určete úhel β, o který je nutno vlákno vychýlit, aby síla napínající vlákno při průchodu rovnovážnou polohou měla dvojnásobnou velikost síly napínající vlákno v krajních polohách.

3. Těleso o hmotnosti m uvolníme ve výšce h nad zemským povrchem. Země má poloměr R a hmotnost M. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie na zemském povrchu, je potenciální energie soustavy Země – těleso ve vzdálenosti h nad povrchem Země dána vztahem:

$$E_\mathrm{p} = \varkappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) .$$

a) Určete rychlost dopadu tělesa na zemský povrch.

b) Určete zrychlení a_1 tělesa na začátku a zrychlení a_2 na konci pohybu.

c) Se stálým zrychlením a_1 by těleso spadlo z výšky h za dobu t_1, se stálým zrychlením a_2 za dobu t_2. Odhadněte skutečnou dobu pádu.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m, $h = 2,00 \cdot 10^6$ m. Gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}66 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.

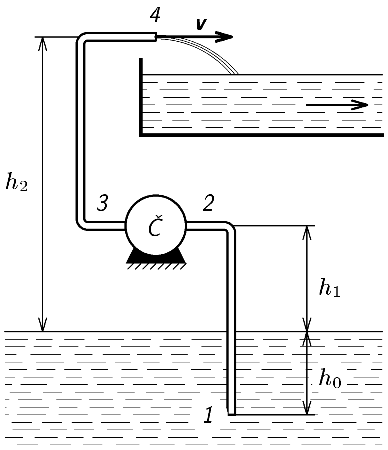
4. Čerpadlo čerpá vodu z řeky potrubím stálého průřezu o plošném obsahu S do koryta zavlažovací soustavy (obr. 1). Objemový průtok vody má stálou hodnotu Q_V. Sací otvor *1* potrubí je ve hloubce h_0 pod hladinou řeky. Vstupní otvor *2* a výstupní otvor *3* čerpadla jsou ve stejné výšce h_1 nad hladinou řeky. Výtokový otvor *4* potrubí je ve výši h_2 nad hladinou řeky. Okolní vzduch má atmosférický tlak p_a.

a) Určete rychlost v proudící vody v potrubí.

b) Jaký tlak by měla voda
v sacím otvoru,
ve vstupním otvoru čerpadla,
ve výstupním otvoru čerpadla
a ve výtokovém otvoru potrubí,
kdyby se chovala jako ideální kapalina?
Návod: Použijte „úplnou" Bernoulliovu rovnici pro ideální kapaliny:

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = konst\,.$$

Obr. 1



c) S jakým výkonem by v takovém případě čerpadlo pracovalo?

d) Určete výkon P' a účinnost η čerpací jednotky, jestliže ve skutečnosti musí být mezi vstupním a výstupním otvorem čerpadla udržován tlakový rozdíl p_r (větší, než jaký vychází z výpočtu pro ideální kapalinu).

e) Do jaké největší výšky $h_{1\mathrm{max}}$ bychom mohli při daných hodnotách Q_V a S čerpadlo umístit, kdyby se voda chovala jako ideální kapalina?

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $Q_V = 3{,}6\ \mathrm{l\cdot s^{-1}}$, $S = 5{,}0\ \mathrm{cm^2}$,
$g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\varrho = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $h_0 = 0{,}6$ m, $h_1 = 1{,}5$ m, $h_2 = 6{,}2$ m,
$p_\mathrm{a} = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, $p_\mathrm{r} = 120$ kPa.

5. Vzduch v atmosféře se při proudění vzhůru adiabaticky rozpíná a ochlazuje, při proudění dolů se adiabaticky stlačuje a otepluje. V důsledku těchto dějů i v uklidněné atmosféře zakryté mraky teplota vzduchu klesá s rostoucí výškou a vztah mezi atmosférickým tlakem a teplotou je stejný jako při adiabatickém ději.

Za těchto podmínek vypustíme balon stálého objemu V naplněný vodíkem. Tlak vodíku v balonu se během stoupání vyrovnává pojistným ventilem s tlakem okolní atmosféry. Na zemi byl naměřen atmosférický tlak p_1 a teplota t_1. Ve výšce, do které chceme vystoupit, je atmosférický tlak p_2.

a) Jaká je v této výšce teplota vzduchu?

b) Kolik vodíku unikne během výstupu pojistným ventilem do atmosféry?

c) Jak se změní nosnost balonu?

Řešte obecně a pro hodnoty:

$$p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\ t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C},\ p_2 = 0{,}83 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}, V = 500\ \mathrm{m^3}.$$

Vzduch považujte za plyn s dvouatomovými molekulami, jehož molární hmotnost je $M_\mathrm{m} = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Poissonova konstanta vzduchu i vodíku má hodnotu $\varkappa = 1{,}40$.

6. *Praktická úloha:* **Měření povrchového napětí**

Úlol: Porovnejte povrchové napětí destilované vody a vodního roztoku saponátu.

a) metodou kapilární elevace
b) odtrhovací metodou
c) kapkovou metodou

Měření proveďte při teplotě laboratoře. Povrchové napětí saponátového roztoku změřte při různých koncentracích (1:10 000, 1:1000, 1:100) a výsledky porovnejte. Naměřené povrchové napětí čisté vody porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Pomůcky:

2 skleněné kádinky, saponátový prostředek na nádobí (Jar, Lena apod.), destilovaná voda, kapilára, mikrometr, jehla, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, závaží, stojan, skleněná trubička s nádobkou a kohoutem, závěsný kroužek (nebo kovový rámeček s nataženým drátkem), stoleček nad misku vah.

Provedení úlohy:

a) *Metoda kapilární elevace* je založena na porovnání tíhy G sloupce kapaliny vystouplé v kapiláře a síly F vyvolané povrchovým napětím, která tento sloupec udržuje v určité výšce nad okolní hladinou (obr. 2).

$$G = \pi r^2 h \varrho g\,, \qquad F = 2\pi r \sigma \cos\vartheta\,.$$

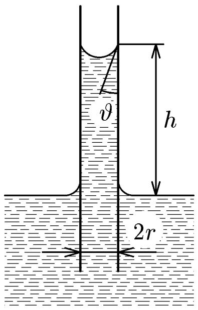
Jelikož úhel smáčení $\vartheta < 10^\circ$, můžeme psát

$$\cos\vartheta \doteq 1\,, \quad F \doteq 2\pi r\sigma\,.$$

Z rovnosti $F = G$ plyne

$$\sigma = \frac{h\varrho g r}{2}\,.$$

Do kádinky naplněné zkoumanou kapalinou ponoříme svisle kapiláru, poněkud ji posuneme nahoru a změříme kapilární elevaci h. Průměr kapiláry $2r$ zjistíme pomocí jehly, kterou zasuneme do kapiláry a v místě označeném při okraji kapiláry změříme mikrometrem.



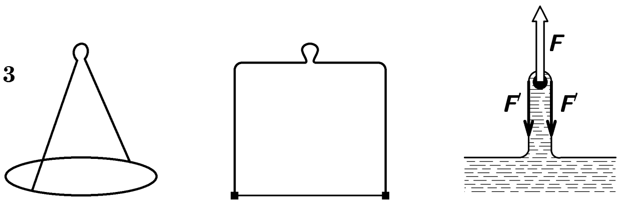
Obr. 2

b) *Odtrhovací metoda* je založena na zjištění síly potřebné k odtržení povrchové blány ulpívající na kroužku (či rovném drátku) délky l vytahovaného z kapaliny, která jej smáčí (obr. 3). Kapalinová blána má dva povrchy a působí tedy silou

$$F = 2\sigma l\,,$$

kterou můžeme určit pomocí laboratorních vah.

Obr. 3



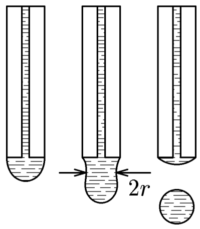
Nad misku vah umístíme můstek s kádinkou, ve které je zkoumaná kapalina, a na konec vahadla zavěsíme kroužek nebo rámeček s drátkem a vyvážíme jej. Hladinu kapaliny v kádince upravíme tak, aby se nacházela asi 2 mm pod vyváženým kroužkem. Vychýlíme-li vahadlo, hladina zachytí kroužek a rovnováha se poruší. Sílu povrchového napětí určíme tárováním. Na druhou misku vah přidáme lehký kalíšek a na něj sypeme zvolna drobná tělíska (táru), až dojde k odtržení kroužku od hladiny vody nebo k vytažení tenkého kapalinového prstence nad hladinu saponátového roztoku. (Jako tárovací tělíska se hodí např. jáhly nebo hořčičné semínko.) Zvážíme hmotnost m samotného kalíšku s tělísky a určíme povrchové napětí

$$\sigma = \frac{mg}{2l}\,.$$

c) *Kapková metoda* měření povrchového napětí spočívá v určení poměru hmotností kapek dvou kapalin (měřené a srovnávací) při znalosti povrchového napětí srovnávací kapaliny. Ze silnostěnné skleněné trubičky necháme *velmi zvolna* odkapat stejný počet N kapek měřené i srovnávací kapaliny. Jejich celkové hmotnosti M_1, M_2 pak zvážíme.
Tíhová síla působící na kapku v okamžiku odtržení od konce trubičky je rovna síle povrchového napětí:

$$\frac{M_1 g}{N} = 2\pi r\sigma_1 \qquad \frac{M_2 g}{N} = 2\pi r\sigma_2\,,$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{M_2}\sigma_2\,.$$

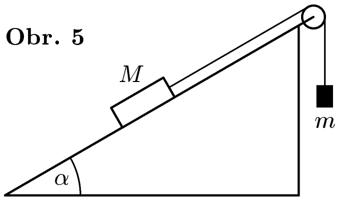


Obr. 4

Jako srovnávací kapalinu zvolíme destilovanou vodu.

7. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α je položen kvádr o hmotnosti M. Těleso s hmotností m je spojeno s kvádrem vláknem vedeným přes pevnou kladku (obr. 5). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je f, součinitel statického tření je f_0. Budeme vyšetřovat tyto případy:

Obr. 5



a) udělíme počáteční rychlost v_0 tělesu o hmotnosti m ve směru svislém dolů,

b) udělíme počáteční rychlost v_0 kvádru ve směru dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou,

c) ponecháme soustavu v klidu.

Pro všechny případy vypočtěte zrychlení soustavy a tahovou sílu vlákna a diskutujte, jak se bude soustava pohybovat.

Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

1. Vlak metra může jet maximální rychlostí $v = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a zrychlovat nebo zpomalovat s maximálním zrychlením $a = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vzdálenost mezi dvěma sousedními stanicemi je $d = 960$ m.

a) Určete nejkratší možnou dobu $t_{\min}$ jízdy mezi stanicemi. Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.

b) Určete nejkratší možnou dobu $t'_{\min}$ jízdy mezi stanicemi, je-li za jinak stejných podmínek z provozních důvodů snížena maximální rychlost na $v' = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

c) Určete nejkratší možnou dobu $t''_{\min}$ jízdy mezi stanicemi, jestliže za jinak stejných podmínek bude při rozjíždění a brzdění povoleno maximální zrychlení $a' = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

d) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase pro všechny 3 pohyby.

e) Pomocí sestrojených grafů určete u každého pohybu dráhu uraženou v čase 10 s.

2. Automobil jedoucí rychlostí o velikosti $v_0 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ začne po přímočaré trajektorii brzdit se stálým zrychlením o velikosti $a = 0{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete dráhu s_1 uraženou v čase $t_1 = 20$ s po začátku brzdění.

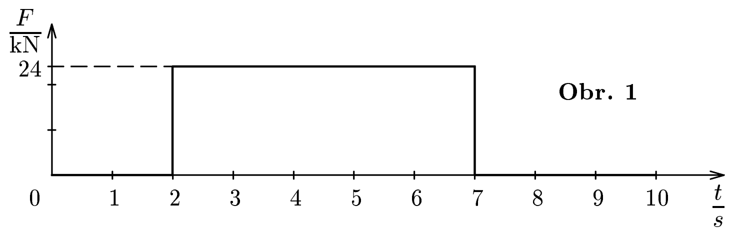
b) Sestrojte na milimetrový papír grafy závislostí rychlosti na čase a dráhy na čase v časovém intervalu od 0 s do 20 s.

c) Určete velikost okamžité rychlosti na konci dráhy $s_2 = 50$ m.

d) Určete průměrnou rychlost v časovém intervalu $t_3 = 5$ s až $t_4 = 12$ s.

e) Určete časový interval velikosti $\Delta t = 4$ s, během něhož urazí automobil během brzdění dráhový úsek $\Delta s = 30$ m.

3. Tramvaj o hmotnosti $m = 20\,000$ kg má na vodorovných kolejích v nulovém čase nulovou počáteční dráhu a nulovou počáteční rychlost. Motor tramvaje působí tahovou silou, jejíž velikost v závislosti na čase udává graf:



Obr. 1

a) Vypočtěte obsah plochy pod grafem a určete jeho fyzikální význam.

b) Sestrojte graf závislosti okamžité rychlosti na čase.

c) Sestrojte graf závislosti uražené dráhy na čase.

d) Sestrojte graf závislosti okamžitého výkonu tramvaje na čase.

e) Sestrojte graf závislosti okamžité síly na dráze. Odporovou sílu zanedbejte.

4. Honza hodil kámen vodorovným směrem z balkónu ve třetím patře budovy ve výšce $h_0 = 10$ m nad vodorovným terénem. Počáteční rychlost kamene měla velikost $v_0 = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Jakou rychlostí v_0' musí hodit kámen Jirka z téhož místa, aby kámen dopadl

a1) do dvakrát větší vzdálenosti od domu,

a2) za dvakrát delší dobu,

a3) dvojnásobnou rychlostí?

b) Z jaké výšky h by Jirka musel hodit kámen vodorovným směrem rychlostí o velikosti v_0, aby kámen dopadl

b1) do dvakrát větší vzdálenosti od domu,

b2) za dvakrát delší dobu,

b3) dvojnásobnou rychlostí?

Odpor vzduchu zanedbejte. Tíhové zrychlení je $g = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5. Jeden úsek horské dráhy v zábavním parku má tvar vertikální kružnice o poloměru r (obr. 2). Vozík tento úsek projíždí setrvačností. Uvažujme ideální případ, kdy tření v ložiskách, valivý odpor kol a odpor vzduchu můžeme zanedbat.

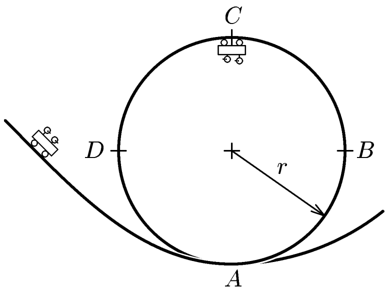
a) Jakou minimální rychlostí se musí pohybovat vozík v bodě C, aby pasažér nevypadl, i když nebude připoután k sedadlu?

b) Jakou rychlost musí mít vozík v bodě A, aby byla splněna pdmínka a)?

c) V kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s největším dostředivým zrychlením? Určete velikost a směr tohoto zrychlení.

d) V kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s maximálním tečným zrychlením? Určete jeho velikost a směr tohoto zrychlení.

e) Určete velikost a směr celkového zrychlení v bodech B a D.



Obr. 2

Řešte obecně a pro hodnoty: $r = 7$ m, $g = 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Rozměry vozíku zanedbejte.

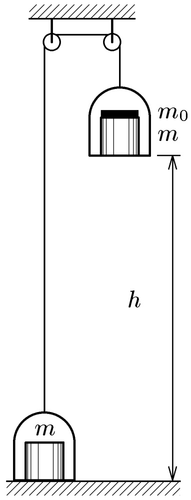
6. *Praktická úloha:* **Studium dynamické soustavy**

Teorie: Dynamickou soustavu tvoří dvojice malých kladek s vláknem, na jehož koncích jsou zavěšena dvě tělesa, každé o hmotnosti m. Po umístění přívažku o hmotnosti m_0 na jedno z těles způsobí stálá tíhová síla tohoto přívažku rovnoměrně zrychlený pohyb soustavy (obr. 3). Pro velikost zrychlení platí při zanedbání hmotnosti kladek:

$$a_1 = \frac{m_0}{2m + m_0} g \,. \tag{3}$$

Toto zrychlení lze též určit experimentálně ze změřené dráhy h a ze změřené doby pohybu t:

$$a_2 = \frac{2h}{t^2} \,. \tag{4}$$



Obr. 3

Úkoly:

a) Odvoďte vztahy (1) a (2).

b) Sestavte soustavu podle předchozího popisu. Na konce vlákna připevněte misky, na které budete klást závaží. Dráhu h volte aspoň 1 m, lépe ještě delší.

c) Změřte dráhu h. Měření zrychlení provádějte pro 2 různé hmotnosti m a u každé pro 2 různé hmotnosti m_0 přívažku. U každé sestavy proveďte 6 měření času, polovinu s přívažkem na levé misce, polovinu s přívažkem na pravé misce, a vypočtěte jeho aritmetický průměr. Pomocí vztahů (1) a (2) vypočtěte zrychlení a_1, a_2 a výsledky měření zapište do tabulky:

$g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $h =$ m											
$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\frac{t_1}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_2}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_3}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_4}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_5}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_6}{\mathrm{s}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{a_1}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$	$\frac{a_2}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$	$\frac{a_2}{a_1}$

d) Zhodnoťte výsledek v posledním sloupci tabulky. Které zrychlení více odpovídá skutečnému zrychlení soustavy?

e) Jaký vliv na výsledek měření může mít tření? Jaký vliv na výsledek měření může mít hmotnost kladek? Vysvětlete a dejte do souvislosti s posledním sloupcem tabulky.

f) Provedeme korekci výsledků změřením třecí síly. Na misku při dané hmotnosti m vložte takový přívažek m_0', při kterém se soustava po uvedení do pohybu vnější silou bude pohybovat setrvačností rovnoměrným pohybem. Třecí síla má tedy velikost $F_t = m_0' g$, a vzorec (1) můžeme nahradit vzorcem

$$a_1' = \frac{m_0 - m_0'}{2m + m_0} g \,, \tag{5}$$

který určuje zrychlení soustavy po korekci. Nové výsledky zapište do tabulky:

$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{m_0}{\text{g}}$	$\frac{m_0'}{\text{g}}$	$\frac{a_1'}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$	$\frac{a_2}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$	$\frac{a_2}{a_1'}$

g) Porovnejte hodnoty a_2/a_1 a a_2/a_1' a formulujte celkový závěr měření.

7. Na kulečníkovém stole leží dvě koule A, B o stejném poloměru $r = 30$ mm. Dva mantinely, které při hře využijeme, představují dvě souřadnicové osy x a y. Počáteční souřadnice středů koulí v milimetrech jsou $A \equiv [400; 600]$ a $B \equiv [300; 150]$. Koule A má po dvou odrazech od mantinelů zasáhnout kouli B.

a) Kterým směrem musíme kouli A vyslat, aby došlo k centrálnímu rázu? Jak dlouhá bude v tomto případě trajektorie bodu A do místa srážky?

b) O jaký úhel se může počáteční směr koule A odchýlit od směru určeného v úkolu a), má-li se koule B alespoň dotknout?

Obě úlohy řešte graficky i početně. Předpokládejte, že odrazy koule od mantinelů jsou dokonale pružné a tření mezi koulí a mantinelem je zanedbatelné.

V druhém kole lze očekávat úlohy z témat: Kinematika
Dynamika
Mechanická práce a energie
Pohyby v gravitačním poli
Téma studijního textu