Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Dráha uražená za dobu $\Delta t = t_2 - t_1 = 6\ \mathrm{s} - 2\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{s}$ je podle grafu $\Delta s = s_2 - s_1 = 0{,}7\ \mathrm{m} - 0{,}4\ \mathrm{m} = 0{,}3\ \mathrm{m}$.

Průměrná rychlost je $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 0{,}075\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **1 bod**

b) V čase 7 s jde o rovnoměrně zrychlený pohyb, který začíná z klidu v čase $t_0 = 5\ \mathrm{s}$ s počáteční uraženou dráhou $s_0 = 0{,}6\ \mathrm{m}$.

Ze vzorce $s = s_0 + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ vyjádříme zrychlení $a = 2\dfrac{s - s_0}{(t - t_0)^2}$,

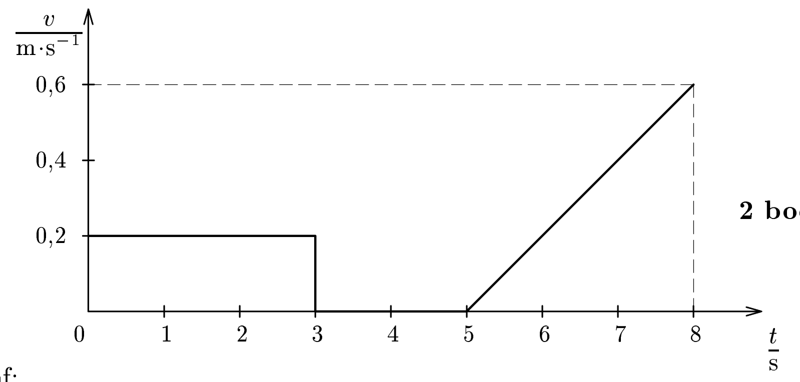
kde např. pro $t = 8\ \mathrm{s}$, $s = 1{,}5\ \mathrm{m}$ vychází $a = 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. **2 body**

c) $t_1 = 2\ \mathrm{s}$: $v_1 = 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$t_2 = 4\ \mathrm{s}$: $v_2 = 0$

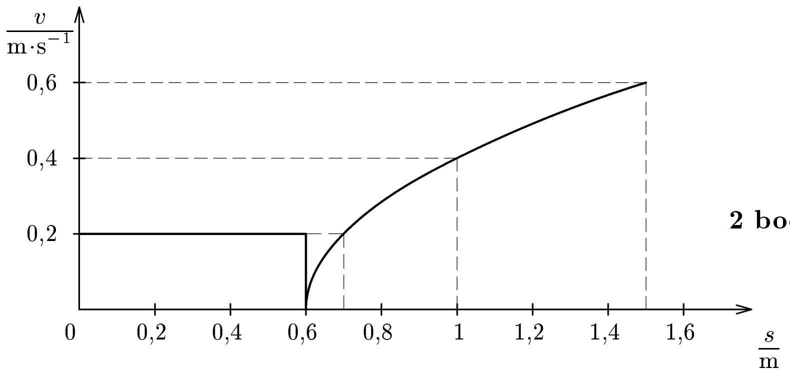
$t_3 = 6\ \mathrm{s}$: $v_3 = a(t_3 - t_0) = 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ **3 body**

d) Graf:



2 body

e) Graf:



2 body

2.a) Z rovnic $v_1 = at_1$, $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu plyne

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_1} = 5{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Motory letadla působí silou $F = ma = \frac{mv_1}{t_1}$.
Po dosazení z rovnice (1) máme

$$F = ma = \frac{mv_1^2}{2s_1} = 69\ \mathrm{kN}\,. \tag{2}$$

2 body

c) Průměrný výkon letadla je určen podílem práce vykonané silou F na dráze s_1 a doby rozjezdu t_1:

$$P_\mathrm{p} = \frac{Fs_1}{t_1} = \frac{\frac{mv_1^2}{2s_1}s_1}{\frac{2s_1}{v_1}} = \frac{mv_1^3}{4s_1} = 960\ \mathrm{kW}\,.$$

2 body

d) Při okamžité rychlosti v_1 je okamžitý výkon letadla $P = Fv_1$.
Po dosazení z rovnice (2) máme

$$P_1 = Fv_1 = \frac{mv_1^3}{2s_1} = 2P_\mathrm{p} = 1{,}92\ \mathrm{MW}\,.$$

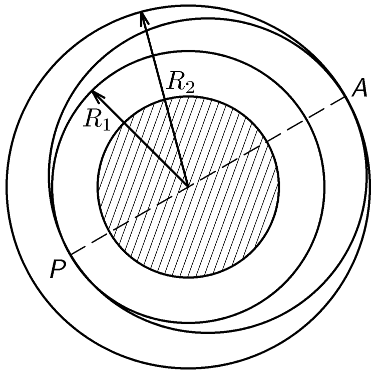
2 body

e) Vykonaná práce je $W = \frac{1}{2}mv_2^2$, kde $v_2 = at_2$ a podle (2) $a = \frac{v_1^2}{2s_1}$.
Po dosazení a úpravě dostaneme

$$W = \frac{mv_1^4}{8s_1^2}t_2^2 = 672\ \mathrm{kJ}\,.$$

2 body

3.a) Obrázek:



1 bod

b) Ze vzorců pro kruhovou rychlost $v_{\mathrm{k1}} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R_1}}$, $\quad v_{\mathrm{k2}} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R_2}}$
pro $R_1 < R_2$ plyne $v_{\mathrm{k1}} > v_{\mathrm{k2}}$. Aby se družice v bodě P dostala z menší kruhové trajektorie na elipsu, musí svoji rychlost zvětšit, tedy $v_{\mathrm{p}} > v_{\mathrm{k1}}$. Při pohybu z P do A rychlost v důsledku 2. Keplerova zákona klesá, tj $v_{\mathrm{p}} > v_{\mathrm{a}}$. V bodě A pak musí zrychlit, aby přešla na větší kružnici, tj. $v_{\mathrm{a}} < v_{\mathrm{k2}}$. Celkově tedy platí

$$v_{\mathrm{a}} < v_{\mathrm{k2}} < v_{\mathrm{k1}} < v_{\mathrm{p}}\,.$$

3 body

c) Z poznatku, že dostředivá síla při pohybu družice po kruhové trajektorii je silou gravitační, dostaneme pro první družici o hmotnosti m:

$$mR_1\frac{4\pi^2}{T_1^2} = \varkappa\frac{mM}{R_1^2}$$

plyne $\qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_1^3}{\varkappa M}} = 5\,830\ \mathrm{s}\,. \qquad (1)$

Obdobně $\qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_2^3}{\varkappa M}} = 7\,120\ \mathrm{s}\,.$

Podle 3. Keplerova zákona je $\dfrac{T_3^2}{T_1^2} = \dfrac{a^3}{R_1^3}$, kde $a = \dfrac{1}{2}(R_1 + R_2)$
je hlavní poloosa elipsy. Úpravou a dosazením vztahu (1) dostaneme

$$T_3 = T_1\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{8R_1^3}} = \pi\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2\varkappa M}} = 6\,460\ \mathrm{s}\,.$$

6 bodů

4.a) Na zavěšené závaží působí tíhová a vztlaková síla. Platí

$$F_0 = m_0 g - \varrho \frac{m_0}{\varrho_0} g = m_0 g (1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}) = 8{,}81\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

b) Z rovnice $F_1 = m_1 g - \varrho \frac{m_1}{\varrho_1} g$ plyne $m_1 = \dfrac{F_1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{\varrho_1}\right) g} = 0{,}212\ \mathrm{kg}$.

Výchozí rovnici lze též napsat ve tvaru $F_1 = \varrho_1 V_1 g - \varrho V_1 g$, z níž plyne

$$V_1 = \frac{F_1}{(\varrho_1 - \varrho) g} = 60{,}4\ \mathrm{cm}^3\,.$$

4 body

c) Vztlaková síla působí na diamanty i na závaží. Na vyvážených vahách platí

$$m_0' g - \varrho \frac{m_0'}{\varrho_0} g = m_2 g - \varrho \frac{m_2}{\varrho_1} g\,.$$

Z rovnice plyne

$$m_2 = m_0' \frac{1 - \dfrac{\varrho}{\varrho_0}}{1 - \dfrac{\varrho}{\varrho_1}} = 1{,}427\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body