Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autorka úloh: R. Horáková

1. a) Oddělením části D zůstanou tři části, každá o hmotnosti $m/4$, hmotnost zbylého tělesa je $3m/4$. Souřadnice těžišť jednotlivých částí jsou:

A: $x_A = a/4\,,\quad y_A = a/4\,,$

B: $x_B = 3a/4\,,\quad y_B = a/4\,,$

C: $x_C = a/4\,,\quad y_C = 3a/4\,.$ **3 body**

Souřadnice těžiště tělesa určíme ze vztahů:

$$x_{T1} = \frac{\frac{m}{4}\left(x_A + x_B + x_C\right)}{\frac{3m}{4}}\,,\qquad y_{T1} = \frac{\frac{m}{4}\left(y_A + y_B + y_C\right)}{\frac{3m}{4}}\,.$$

Po dosazení vychází $x_{T1} = y_{T1} = \dfrac{5a}{12} = 16{,}7\ \mathrm{cm}\,.$ **2 body**

b) Počítáme obdobně, souřadnice těžišť jednotlivých částí jsou stejné, hmotnost části A je $m/2$, hmotnost celého tělesa je m.

$$x_{T2} = \frac{\frac{m}{2}x_A + \frac{m}{4}\left(x_B + x_C\right)}{m}\,,\qquad y_{T2} = \frac{\frac{m}{2}y_A + \frac{m}{4}\left(y_B + y_C\right)}{m}\,.$$

Po dosazení vychází $x_{T2} = y_{T2} = \dfrac{3a}{8} = 15{,}0\ \mathrm{cm}\,.$ **2 body**

c) Obdobný výpočet, nyní je hmotnost části B rovna $m/2$.

$$x_{T3} = \frac{\frac{m}{2}x_B + \frac{m}{4}\left(x_A + x_C\right)}{m}\,,\qquad y_{T3} = \frac{\frac{m}{2}y_B + \frac{m}{4}\left(y_A + y_C\right)}{m}\,.$$

Po dosazení vychází $x_{T3} = \dfrac{a}{2}\,,\ y_{T3} = \dfrac{3a}{8} = 15{,}0\ \mathrm{cm}\,.$ **3 body**

Úlohu lze řešit i skládáním sil.

2. a) Celková energie kmitavého pohybu je $E = \frac{ky_\mathrm{m}^2}{2}$. V okamžiku, kdy je potenciální energie kmitání rovna energii kinetické, jsou obě rovny polovině energie celkové. Platí tedy

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}ky_\mathrm{m}^2\,, \qquad y^2 = \frac{y_\mathrm{m}^2}{2}\,,$$

$$y = \frac{y_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 4{,}2\,\mathrm{cm}\,.$$

3 body

b) Jestliže $y = \frac{y_\mathrm{m}}{2}$, platí: $E\mathrm{p} = \frac{ky^2}{2} = \frac{ky_\mathrm{m}^2}{8}$.

Kinetickou energii určíme ze vztahu: $E_\mathrm{k} = E - E_\mathrm{p} = \frac{3ky_\mathrm{m}^2}{8}$.

Hledaný poměr $E_\mathrm{k} : E_\mathrm{p} = 3$.

3 body

c) Doba kmitu první kuličky je $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$,

druhé kuličky $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m_1}{k}}$.

Hledaný poměr je: $T_1 : T_2 = 1 : 2$.

2 body

d) Poněvadž celková energie kmitání je určena tuhostí pružiny a amplitudou výchylky, což je stejné pro obě kuličky, je poměr celkových energií

$$E_1 : E_2 = 1 : 1\,.$$

2 body

3. a) Plyn spotřebuje při izotermickém stlačení práci

$$W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln 4 \doteq 1{,}386 p_1 V_1$$

2 body

a při adiabatické expanzi vykoná práci

$$W_2' = -\Delta U = \frac{5}{2} n R_\mathrm{m} (T_3 - T_4) = \frac{5}{2} (p_3 V_2 - p_4 V_1)\,.$$

Pro jednotlivé děje dále platí

$$p_2 = 4p_1\,, \qquad p_3 = 2p_2 = 8p_1\,, \qquad p_4 = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} = 2^{3-2\varkappa} p_1\,.$$

Po dosazení

$$W_2' = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(2 - 2^{3-2\varkappa}\right) = 5 p_1 V_1 \left(1 - 2^{2-2\varkappa}\right) \doteq 1{,}789 p_1 V_1\,.$$

4 body

b) Plyn přijímá teplo pouze při izochorickém zahřátí. Platí

$$Q = n C_V (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} n R_\mathrm{m} (T_3 - T_1) = \frac{5}{2} (p_3 V_2 - p_2 V_2) = \frac{5}{2} p_1 V_1\,.$$

2 body

c) Kruhový děj má účinnost

$$\eta = \frac{W_2' - W_1}{Q} = 2 - 2^{3-2\varkappa} - \frac{2}{5} \ln 4 = 30{,}0\,\%\,.$$

2 body

4. a) Tlaky p', p'' těsně pod zakřivenými hladinami v kapilárách určíme jako rozdíly atmosférického tlaku a příslušných kapilárních tlaků. Pozdíl těchto tlaků je vyrovnán hydrostatickým tlakem sloupce vody o výšce Δh:

$$p'' - p' = \left(p_{\mathrm{at}} - \frac{4\sigma}{D}\right) - \left(p_{\mathrm{at}} - \frac{4\sigma}{d}\right) = 4\sigma\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) = \varrho g \Delta h\,,$$

$$\sigma = \frac{\varrho g \Delta h}{4\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)}\,.$$

Pro teploty t_1, t_2 dostaneme:

$$\sigma_1 = 7{,}30 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,, \qquad \sigma_2 = 6{,}23 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

4 body

b) Úpravou vztahu $\sigma_2 = \sigma_1\,[1 + \alpha(t_2 - t_1)]$ dostaneme:

$$\alpha = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1(t_2 - t_1)} = \frac{-\,1{,}09 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}{7{,}30 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}} \cdot 80\ \mathrm{K}} = -2{,}48 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}\,.$$

4 body

c) Dosazením hodnot určených v první a druhé části úlohy a teploty t_3 dostaneme:

$$\sigma_3 = \sigma_1\,[1 + \alpha(t_3 - t_1)] = 6{,}85 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

Úlohu c) můžeme řešit také lineární interpolací:

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}\,, \qquad \sigma_3 = \sigma_1 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)(t_3 - t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

2 body