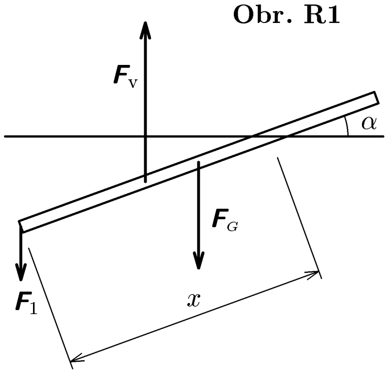
Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: R. Baník (5), I. Čáp (1), R. Horáková (4) , P. Šedivý (2, 6, 7) a I. Volf (3)

1. a) Při dosažení určité zátěže a tím i síly $F = F_1$ se začne druhý konec tyče vynořovat nad hladinu. Podmínky rovnováhy tyče v šikmé poloze určíme z obr. R1:

Obr. R1



$$F_1 = F_v - F_G\,,$$

$$F_v \frac{x}{2}\cos\alpha - F_G \frac{L}{2}\cos\alpha = 0\,,$$

kde $F_G = \varrho S L g$, $F_v = \varrho_v S x g$, ϱ je hustota dřeva, ϱ_v je hustota vody, S je obsah průřezu tyče a x je délka ponořené části tyče. Z toho určíme délku ponořené části tyče a velikost F_1 tahové síly lanka pro šikmou polohu tyče:

$$F_v x = F_G L\,, \quad S\varrho_v g x^2 = S\varrho g L^2\,, \quad x = L\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_v}}\,, \quad F_1 = mg\left(\sqrt{\frac{\varrho_v}{\varrho}} - 1\right)\,.$$

Číselně: $x = 0{,}67$ m , $F_1 = 0{,}96$ N .
Velikost síly v šikmé poloze lanka nezávisí na úhlu α, proto se tyč postaví do kolmé polohy naráz, bez zvyšování zátěže. Její volný konec vystoupí do výšky $h_1 = L - x = 0{,}13$ m.

4 body

b) Pro $\alpha = 90°$ (poloha kolmo na hladinu) dostaneme:

$$S(L-h)\varrho_v g = SL\varrho g + F\,, \qquad Sh\varrho_v g = SL(\varrho_v - \varrho)g - F\,,$$

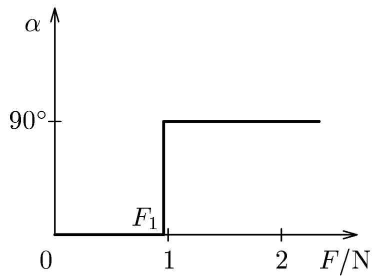
$$h = L\frac{\varrho_v - \varrho}{\varrho_v} - \frac{F}{S\varrho_v g} = L\left[1 - \frac{\varrho}{\varrho_v}\left(\frac{F}{mg} + 1\right)\right]\,.$$

Hraniční hodnota F_2 tahové síly lanka je dána podmínkou $h = 0$:

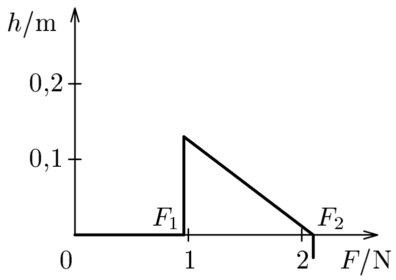
$$F_2 = mg\left(\frac{\varrho_v}{\varrho} - 1\right)\,.$$

Číselně: $F_2 = 2{,}1$ N.

Po překročení této síly klesne tyč bez dalšího zvětšování zátěže ke dnu (zátěž se dotkne dna tyč na lanku zůstane ve svislé poloze). **3 body**



Obr. R2



Obr. R3

3 body

2. a) V neinerciální vztažné soustavě spojení s rotujícím závěsem působí po vychýlení závěsu na kuličku tři síly, které jsou v rovnováze: síla vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$, tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ (obr. R4). Platí:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{o}}{F_G} = \frac{m\omega^2 l \sin\varphi}{mg} = \frac{4\pi^2 f^2 l \sin\varphi}{g}\,.$$

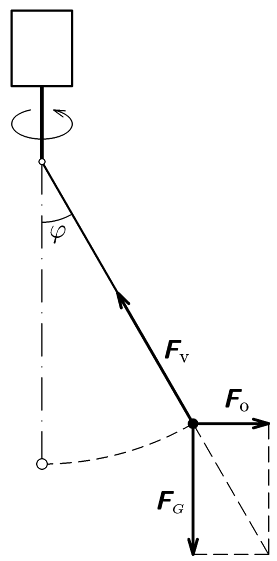
Tato rovnice má dvě řešení:

$$\sin\varphi = 0\,, \qquad \cos\varphi = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l}\,.$$

Druhá rovnovážná poloha může vzniknout jen když

$$\frac{g}{4\pi^2 f^2 l} < 1\,, \qquad f > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = f_\mathrm{k}\,.$$

Je-li překročena kritická frekvence, je první rovnovážná poloha labilní a kulička po sebemenším vychýlení přejde do druhé rovnovážné polohy, která je stabilní.

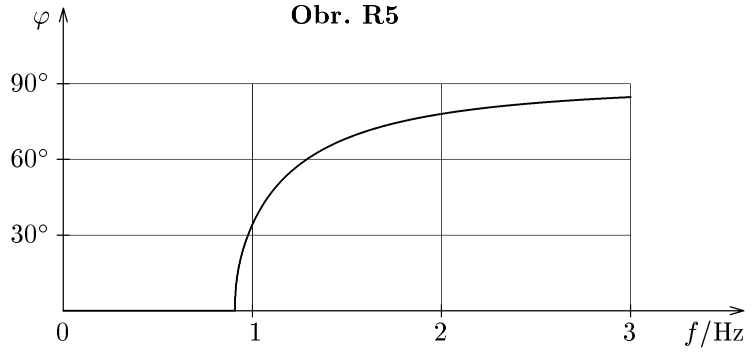


Obr. R4

6 bodů

b) Pro danou délku závěsu dostaneme $f_\mathrm{k} = 0{,}91$ Hz. Graf závislosti odchylky závěsu na frekvenci otáčení je na obrázku R5:

Obr. R5



4 body

3. a, b) Počáteční rychlost míčku měla velikost $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_0)} = 13{,}29\,\mathrm{ms}^{-1}$.
Při prvním odrazu od chodníku se velikost rychlosti míčku zmenšila z $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ na $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Z toho určíme koeficient vzpruživosti

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866 = \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_3} \cdots .$$

Po dalších odrazech měla rychlost míčku velikost:

$$v_3 = v_2 \cdot k = v_1 \cdot k^2\,, \quad v_4 = v_3 \cdot k = v_1 \cdot k^3 \ \cdots \ v_n = v_1 \cdot k^{n-1}\,.$$

První výstup se uskutečnil za dobu $\tau_0 = \dfrac{v_0}{g} = \sqrt{\dfrac{2(h_1 - h_0)}{g}}$, první sestup za dobu $\tau_1 = \dfrac{v_1}{g} = \sqrt{\dfrac{2h_1}{g}}$. Další výstupy a sestupy proběhly za doby:

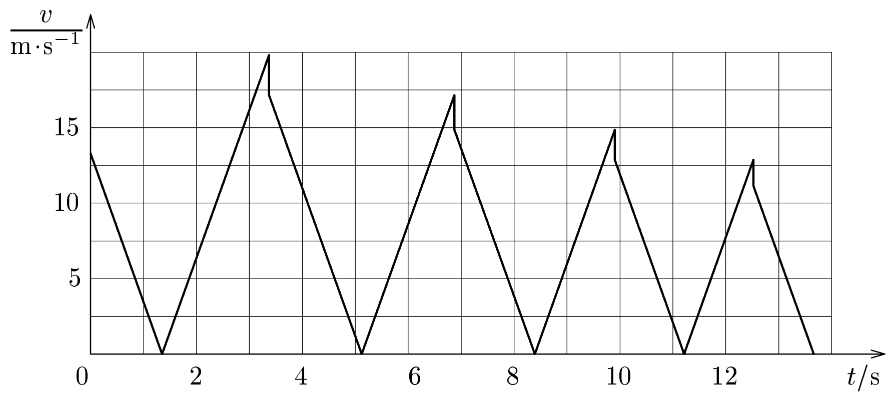
$$\tau_2 = \frac{v_2}{g} = k\frac{v_1}{g} = k\tau_1\,, \quad \tau_3 = \frac{v_3}{g} = k^2\tau_1 \ \cdots \ \tau_n = k^{n-1}\tau_1\,.$$

Číselné hodnoty jsou pro přehlednost zapsány do tabulky:

i	0	1	2	3	4	5
$v_i/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	13,29	19,81	17,16	14,86	12,87	11,14
τ_i/s	1,35	2,02	1,75	1,51	1,31	1,14

Časy jednotlivých výstupů jsou $\tau_0,\ \tau_0 + \tau_1 + \tau_2,\ \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3,\ \cdots$.
Číselně 1,35 s, 5,12 s, 8,39 s, 11,21 s, 13,66 s.
Časy jednotlivých dopadů jsou $\tau_0 + \tau_1,\ \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2,\ \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3,\ \cdots$.
Číselně 3,37 s, 6,87 s, 9,90 s, 12,52 s, 14,80 s. **3 body**

Graf: **Obr. R6** **2 body**



c) Výšky výstupu po jednotlivých odrazech určíme ze vztahu

$$h_i = \frac{v_i^2}{2g} = k^{2(i-1)}\frac{v_1^2}{2g} = k^{2(i-1)}h_1 \,.$$

Číselně $h_3 = 11{,}25$ m, $h_4 = 8{,}44$ m, $h_5 = 6{,}33$ m. **2 body**

d) Míček proletí ve výšce $h_0 = 11$ m poprvé v čase $2\tau_0 = 2{,}71$ s. Časy dalších průletů touto výškou budeme počítat od předcházejícího dopadu na chodník. Použijeme rovnici

$$h_0 = v_i t - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad \text{která má za předpokladu} \quad \frac{v_i^2}{2g} > h_0$$

dva kořeny

$$t = \frac{v_i \pm \sqrt{v_i^2 - 2gh_0}}{g}\,.$$

Po prvním odrazu dosadíme $v_i = v_2 = 17{,}16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a dostáváme kořeny $t_2 = 0{,}85$ s a $t_2' = 2{,}65$ s.
Po druhém odrazu dosadíme $v_i = v_3 = 14{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a dostáváme kořeny $t_3 = 1{,}29$ s a $t_3' = 1{,}74$ s.
Po třetím odrazu už míček do výše h_0 nevystoupí.
Od opuštění chlapcovy ruky tedy míček proletí ve výšce h_0 celkem pětkrát v časech 2,71 s, 4,22 s, 6,02 s, 8,16 s a 8,61 s. Nejsnáze jej zachytíme v posledních dvou případech, kdy je jeho rychlost nejmenší. **3 body**

4.a) $T_2 = 3T_1 = 900\ \text{K}\,,\quad T_3 = \dfrac{T_2}{2} = \dfrac{3}{2}T_1 = 450\ \text{K}\,,\quad T_4 = \dfrac{T_3}{3} = \dfrac{T_1}{2} = 150\ \text{K}\,.$

2 body

b) $W = \Delta p \cdot \Delta V = \dfrac{1}{2}p_1 \cdot 2V_1 = p_1V_1 = 16 \cdot 10^3\ \text{J} = 16\ \text{kJ}\,.$

1 bod

c) Plyn přijímá teplo při dějích *1 – 2* a *4 – 1*.

$$Q_{1-2} = nC_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}R_\text{m} \cdot \frac{p_1V_1}{R_\text{m}T_1} \cdot 2T_1 = 7p_1V_1\,,$$

$$Q_{4-1} = nC_V(T_1 - T_4) = \frac{5}{2}R_\text{m} \cdot \frac{p_1V_1}{R_\text{m}T_1} \cdot \frac{T_1}{2} = \frac{5}{4}p_1V_1\,.$$

Celkové přijaté teplo:

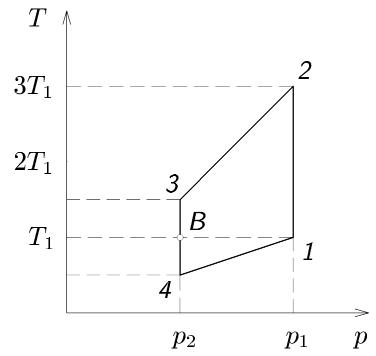
$Q = Q_{1-2} + Q_{4-1} = \dfrac{33}{4}p_1V_1 = 132\ \text{kJ}\,.$ **2 body**

d) Účinnost kruhového děje:

$\eta = \dfrac{W}{Q} = 0{,}12\,.$ **1 bod**

e) Stejnou vnitřní energii jako v bodě *1* bude mít plyn při stejné teplotě T_1. Protože $T_3 > T_1 > T_4$, leží hledaný bod na izobaře *34* popsané rovnicí $p = p_2 = \frac{p_1}{2}$. Hledáme její průsečík s izotermou popsanou rovnicí $pV = p_1V_1$. Po dosazení vyjde: $V = 2V_1$.

f)



Obr. R7

2 body

5.a) Teplo potřebné na zahřátí vody je $Q_1 = \varrho Vc(t_\mathrm{v} - t_1)$, přičemž využití tepla dodaného vařičem je vyjádřeno vztahem $Q_1 = \eta P \tau_1$. Příkon vařiče je

$$P = \frac{\varrho Vc(t_\mathrm{v} - t_1)}{\eta \tau_1}, \qquad \text{číselně} \quad P = 826\ \mathrm{W}\,.$$ **3 body**

b) Stejnou úvahou dostaneme

$$t_2 = t_\mathrm{v} - \frac{\eta P \tau_2}{\varrho V c} = t_\mathrm{v} - \frac{(t_\mathrm{v} - t_1)\tau_2}{\tau_1}, \qquad \text{číselně} \quad t_2 = 57{,}5\ {}^\circ\mathrm{C}\,.$$ **3 body**

c) Označíme-li poměr objemů teplé a studené vody $V_2/V_1 = p$, přičemž $V_1 + V_2 = V$, je teplo potřebné na zahřátí do varu

$$Q_3 = \varrho V_1 c(t_\mathrm{v} - t_1) + \varrho V_2 c(t_\mathrm{v} - t_2) = \varrho V c \left[\frac{t_\mathrm{v} - t_1}{1+p} + \frac{p(t_\mathrm{v} - t_2)}{1+p}\right],$$

přičemž $Q_3 = \eta P \tau_3$. Po dosazení a úpravách dostneme

$$p = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_3 - \tau_2}, \qquad \text{číselně} \quad p \doteq \frac{3}{2}\,.$$ **4 body**

7.a) Výslednou sílu působící na automobil určíme z druhého pohybového zákona $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Rozjezd automobilu proběhl jako sled rovnoměrně zrychlených pohybů. Při zařazení vyššího rychlostního stupně se zrychlení automobilu pokaždé zmenšilo. Velikost zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu určíme pomocí vztahu $a = \Delta v/\Delta t$. Na počátku a na konci rozjezdu dostáváme:

$$a_1 = \frac{8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{5\ \mathrm{s}} = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad F_1 = 1920\ \mathrm{N}\,,$$

$$a_2 = \frac{7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{20\ \mathrm{s}} = 0{,}35\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad F_2 = 420\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

b) Velikost okamžitého zrychlení nerovnoměrně zpomaleného pohybu při jízdě s vypnutým motorem určíme ze sklonu tečny ke grafu rychlosti (obr. R8). Na začátku a na konci tohoto pohybu dostáváme:

$$a_3 = \frac{30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{35\ \mathrm{s}} = 0{,}857\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad F_3 = 1030\ \mathrm{N}\,,$$

$$a_4 = \frac{17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{100\ \mathrm{s}} = 0{,}17\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad F_4 = 204\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

c) Při dojíždění automobilu jej brzdila jen konstantní složka odporové síly. Bezprostředně po vyřazení motoru se uplatnil především vírový odpor vzduchu.

$$F_\mathrm{k} = F_4 = 204\ \mathrm{N} \qquad F_3 = F_4 + kv^2, \quad k = \frac{F_3 - F_4}{v^2} = 0{,}92\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2}\,.$$

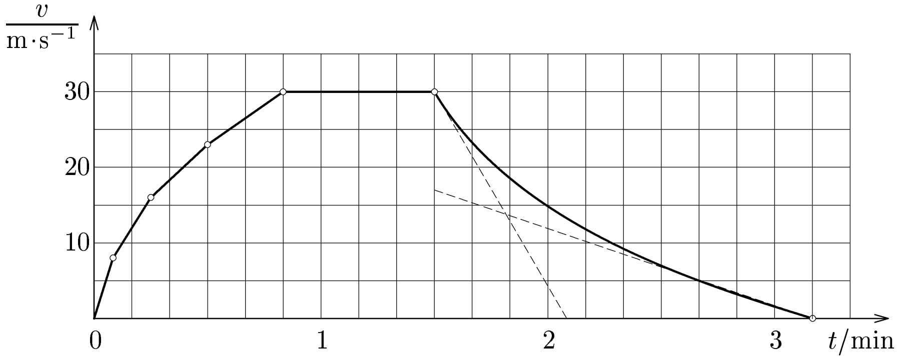
2 body

d) Tažná sílu motoru měla na začátku rozjezdu velikost

$$F_{\mathrm{m1}} = F_{\mathrm{k}} + ma_1 \doteq 2120\ \mathrm{N}\,,$$

na konci rozjezdu $F_{\mathrm{m2}} = F_{\mathrm{k}} + kv^2 + ma_2 = F_3 + ma_2 = 1450\ \mathrm{N}$. Na úseku s konstantní rychlostí byla síla motoru v rovnováze se silou odporovou: $F_{\mathrm{m}} = F_3 = 1030\ \mathrm{N}$. **2 body**

e) Na konci rozjezdu dosáhl motor automobilu výkonu $P_2 = F_{\mathrm{m2}}v = 43{,}5\ \mathrm{kW}$, k udržení stálé rychlosti 30 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ postačil výkon $P = F_{\mathrm{m}}v = 30{,}9\ \mathrm{kW}$. **2 body**



Obr. R8