Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: I. Čáp (3), K. Konrád (2), P. Mazanec (1) a P. Šedivý (4, 5, 6, 7)

1. a) V rovnovážné poloze C kaskadéra je prodloužení lana $\Delta l = H - h - l$ (obr. R1). Tíhová síla a elastická síla lana jsou zde v rovnováze. Počáteční potenciální energie kaskadéra je rovna elastické energii lana při doletu kaskadéra k zemi. Platí:

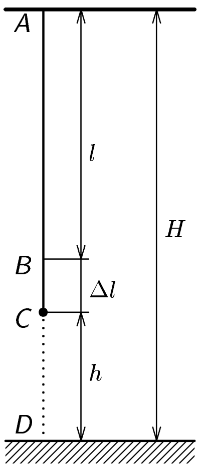
$$mg = k\Delta l = k(H - h - l)\,,$$

$$mgH = \frac{1}{2}k(\Delta l + h)^2 = \frac{mg}{2\Delta l}(\Delta l + h)^2\,,$$

$$2H\Delta l = (\Delta l + h)^2\,, \qquad 2H(H - h - l) = (H - l)^2\,,$$

$$l^2 = H^2 - 2Hh\,, \qquad l = \sqrt{H^2 - 2Hh}\,,$$

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{mg}{H - h - l}\,.$$



Obr. R1

Po dosazení: $l = 38{,}73\ \mathrm{m}\,, \quad \Delta l = 1{,}27\ \mathrm{m}\,, \quad k = 603\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}.$ **4 body**

b) Největší rychlost má kaskadér při průletu rovnovážnou polohou C. Ze zákona zachování energie dostaneme:

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}mv^2\,,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - h) - \frac{1}{2}mg(H - h - l) = \frac{1}{2}mg(H - h + l)\,,$$

$$v = \sqrt{g(H - h + l)}\,.$$

Po dosazení: $v = 27{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 100\ \mathrm{km/h}.$ **3 body**

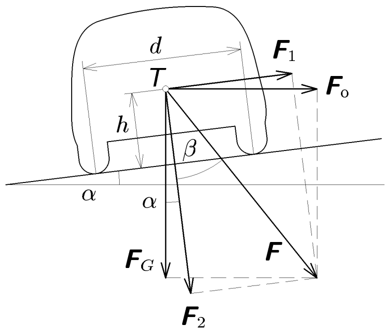
c) V nejnižším bodě působí lano na kaskadéra silou o velikosti $F_\mathrm{m} = k(\Delta l + h)$ a vyvolává přetížení

$$\frac{F_\mathrm{m}}{m} = \frac{k}{m}(\Delta l + h) = \frac{g}{\Delta l}(\Delta l + h) = g\left(1 + \frac{h}{\Delta l}\right) \doteq 8{,}9\,g\,.$$

3 body

2. a) Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele spojeného s automobilem. Výslednice $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ se rozkládá na složku $\boldsymbol{F}_1$ rovnoběžnou s vozovkou, proti které působí smykové tření pneumatik a na složku $\boldsymbol{F}_2$ kolmou k vozovce. Aby nedošlo ke smyku, musí platit

$$F_1 < fF_2\,, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{F_1}{F_2} < f\,.$$



Obr. R2

Z obr. R2 odvodíme:

$$F_1 = F_\mathrm{o}\cos\alpha - F_G\sin\alpha\,,$$

$$F_2 = F_\mathrm{o}\sin\alpha + F_G\cos\alpha\,.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$F_\mathrm{o}(\cos\alpha - f\sin\alpha) < F_G(f\cos\alpha + \sin\alpha)\,,$$

$$\frac{mv^2}{r}(\cos\alpha - f\sin\alpha) < mg(f\cos\alpha + \sin\alpha)\,,$$

$$v < \sqrt{gr\frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}} \qquad \text{číselně} \quad v < 13{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 48\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

6 bodů

b) Aby nedošlo k převrhnutí vozidla, musí vektorová přímka síly $\boldsymbol{F}$ protínat vozovku mezi koly automobilu. Z obrázku odvodíme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_1}{F_2} < \frac{d}{2h}\,.$$

Má-li být tato podmínka splněna až do rychlosti, při které by nastal smyk, musí platit

$$\frac{d}{2h} > f\,, \qquad h < \frac{d}{2f}\,, \qquad \text{číselně} \quad h < 1{,}36\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

3. a) Při nulovém napětí působí na horní desku jen tíhová síla a síly pružin, které jsou v rovnováze. Vzdálenost desek je d. Po připojení napětí se desky začnou přitahovat, což způsobí další deformaci pružin. Na horní desku působí elektrické pole dolní desky silou

$$F_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{C^2}{2\varepsilon_0 S}U^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}U^2\,.$$

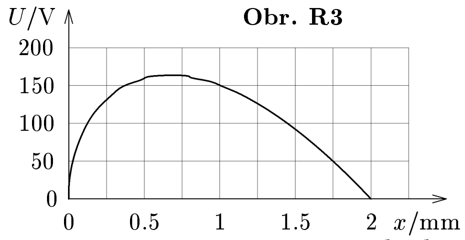
Tato síla je kompenzována přírůstkem deformačních sil pružin $F_\mathrm{p} = kx$. Podmínkou rovnováhy obou sil je

$$U = \sqrt{\frac{2k}{\varepsilon_0 S}x(d-x)^2}\,.$$

Pro dané hodnoty veličin dostáváme vztah mezi číselným hodnotami napětí ve voltech a posunutí horní desky v metrech:

$$\{U\} = 4{,}75 \cdot 10^6\,(0{,}002 - \{x\})\,\sqrt{\{x\}}\,,$$

$$0 \le \{x\} < 0{,}002\,.$$



Obr. R3

4 body

b) Jak vidíme z grafu na obr. R3, zpočátku se s rostoucím napětím zvětšuje posunutí x. Tato část grafu představuje oblast stability. Za maximem křivky se situace mění — při zvětšení vzdálenosti se napětí potřebné k vytvoření rovnováhy snižuje. Překročí-li napětí zdroje hodnotu maxima, začne se vzdálenost mezi deskami spontánně zmenšovat (oblast nestability) a desky se spojí.

3 body

c) Hranici stability můžeme odhadout z grafu — vidíme, že odpovídá přibližně 0,7 mm. Přesněji můžeme určit hranici jako extrém funkce — první derivace musí být nulová.

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2k}{\varepsilon_0 S}}\,\frac{(d-x)^2 - 2x(d-x)}{2(d-x)\sqrt{x}} = 0\,.$$

Podmínka je splněna pro $x_\mathrm{m} = \dfrac{d}{3} = 0{,}67\ \mathrm{mm}$. Aby se desky spojily, musí napětí dosáhnout hodnoty odpovídající maximu funkce:

$$U_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2kd}{3\varepsilon_0 S}}\,\frac{2d}{3} \doteq 164\ \mathrm{V}\,.$$

3 body

4. a) Uvolněné závaží kmitá okolo rovnovážné polohy, ve které by se po delší době zastavilo. Když se závaží nachází v dolní krajní poloze, působí na siloměr síla o velikosti 6,6 N. Když se nachází v horní krajní poloze, působí na siloměr síla o velikosti 2,0 N. Po ustálení závaží v rovnovážné poloze bude tedy na siloměr působit síla o velikosti 4,3 N. Tíha samotné pružiny je přibližně 0,2 N. Tíha závaží má tedy velikost 4,1 N a hmotnost závaží je $m = 0{,}42$ kg. Hmotnost pružiny je malá v porovnání s hmotností závaží a uplatní se jen částečně. Proto ji zanedbáme.

4 body

Z grafu odečteme periodu kmitů: $8T = 6{,}96\ \mathrm{s}$, $T = 0{,}87\ \mathrm{s}$. **1 bod**

Pružina má tuhost $k = m\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} \doteq 22\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. **3 body**

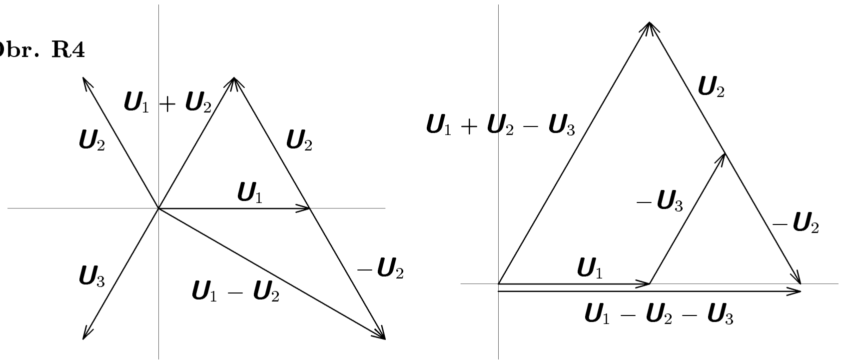
b) Amplituda výsledné síly, která během kmitání působí na závaží, je $F_\mathrm{m} = 2{,}3$ N. Tomu odpovídají amplitudy výchylky a rychlosti

$$y_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{k} = 0{,}105\ \mathrm{m} \qquad v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{2\pi y_\mathrm{m}}{T} = 0{,}76\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

5. Připojením jedné cívky nebo seriové kombinace dvou, případně všech tří cívek mezi svorky M, N vytvoříme větev, ve které mohou být napětí u_1, u_2, u_3 orientována od svorky M ke svorce N nebo naopak. Amplitudu a počáteční fázi výsledného napětí seriově spojených cívek určíme nejjednodušejí pomocí fázorových diagramů, např:

Obr. R4



Můžeme rovněž využít vztahy: $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{0}$.
Úplný přehled všech možností je v tabulce:

Č.	Spojení	Amp.	Poč.fáze	Č.	Spojení	Amp.	Poč.fáze
1	u_1	U_m	0°	14	$-u_2 - u_3$	U_m	0°
2	u_2	U_m	120°	15	$-u_1 - u_3$	U_m	120°
3	u_3	U_m	240°	16	$-u_1 - u_2$	U_m	240°
4	$u_1 + u_2$	U_m	60°	17	$-u_3$	U_m	60°
5	$u_2 + u_3$	U_m	180°	18	$-u_1$	U_m	180°
6	$u_3 + u_1$	U_m	300°	19	$-u_2$	U_m	300°
7	$u_1 - u_2$	$U_m\sqrt{3}$	330°	20	$u_2 - u_1$	$U_m\sqrt{3}$	150°
8	$u_2 - u_3$	$U_m\sqrt{3}$	90°	21	$u_3 - u_2$	$U_m\sqrt{3}$	270°
9	$u_3 - u_1$	$U_m\sqrt{3}$	210°	22	$u_1 - u_3$	$U_m\sqrt{3}$	30°
10	$u_3 + u_2 - u_1$	$2U_m$	180°	23	$u_1 - u_2 - u_3$	$2U_m$	0°
11	$u_1 + u_3 - u_2$	$2U_m$	300°	24	$u_2 - u_1 - u_3$	$2U_m$	120°
12	$u_1 + u_2 - u_3$	$2U_m$	60°	25	$u_3 - u_1 - u_2$	$2U_m$	240°
13	$u_1 + u_2 + u_3$	0	—	26	$-u_1 - u_2 - u_3$	0	—

Spojení č. 1 až 6 dávají stejný výsledek jako spojení č. 14 až 19. Neuvažujeme-li spojení č. 13 a 26, kdy je výsledné napětí nulové, dostáváme tyto možné amplitudy a počáteční fáze výstupního napětí:

$$\left.\begin{array}{r} U_m\,, \quad \varphi_0 = k\cdot 60^\circ \\ \sqrt{3}U_m\,,\ \varphi_0 = 30^\circ + k\cdot 60^\circ \\ 2U_m\,, \quad \varphi_0 = k\cdot 60^\circ \end{array}\right\}\ k = 0 \text{ až } 5,\ \text{celé číslo}$$

Můžeme tedy získat 18 různých časových průběhů výstupního napětí.

10 bodů

7. a) c) Pro výpočet objemu nasycených par upravíme van der Waalsovu rovnici na tvar

$$pV^3 - n(pb + RT)V^2 + n^2aV - n^3ab = 0\,,$$

kde $n = \dfrac{m}{M_\mathrm{m}} = \dfrac{1{,}000\ \mathrm{g}}{18{,}015\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}} = 0{,}055509298$ mol je látkové množství daných vodních par. (Mezivýsledek není zaokrouhlen, zaokrouhlíme až konečné výsledky.) Dostali jsme kubickou rovnici, která může mít až 3 reálné kořeny. Ty získáme nejsnadněji užitím některé numerické metody. Hledáme takový kořen, který se příliš neliší od výsledku získaného pomocí stavové rovnice:

$$V^\star = \frac{nRT}{p}\,.$$

Pro teplotu $t_1 = 30\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_1 = 303{,}15$ K vychází

$$V_1^\star = 0{,}032998\ \mathrm{m}^3\,,\quad V_1 = 0{,}032988\ \mathrm{m}^3.$$

Oba výsledky jsou prakticky stejné. Relativní odchylka 0,03 % je srovnatelná s přesností dosazovaných hodnot. Zaokrouhlíme na $V_1 = 0{,}0330\ \mathrm{m}^3$.
Pro teplotu $t_2 = 70\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 343{,}15$ K vychází

$$V_2^\star = 0{,}005083\ \mathrm{m}^3\,,\quad V_2 = 0{,}005074\ \mathrm{m}^3.$$

Relativní odchylka ve druhém případě je 0,2 %, což ovlivňuje třetí platnou číslici. Výsledek zaokrouhlíme na $V_2 = 0{,}00507\ \mathrm{m}^3$.

5 bodů

b) Pro výpočet průběhu izoterm upravíme van der Waalsovu rovnici na tvar

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}\,.$$

Výsledky výpočtů jsou zapsány v tabulkách spolu s hodnotami $p^\star$ vypočítanými podle stavové rovnice upravené na tvar

$$p^\star = \frac{nRT}{V}\ :$$

$t_1 = 30\ ^\circ\mathrm{C}$

V/m^3	0,04	0,05
p/Pa	3496,9	2797,7
$p^\star/\mathrm{Pa}$	3497,8	2798,3

Pro $V < V_1$ jsou páry nasycené a $p = p_1 = konst.$

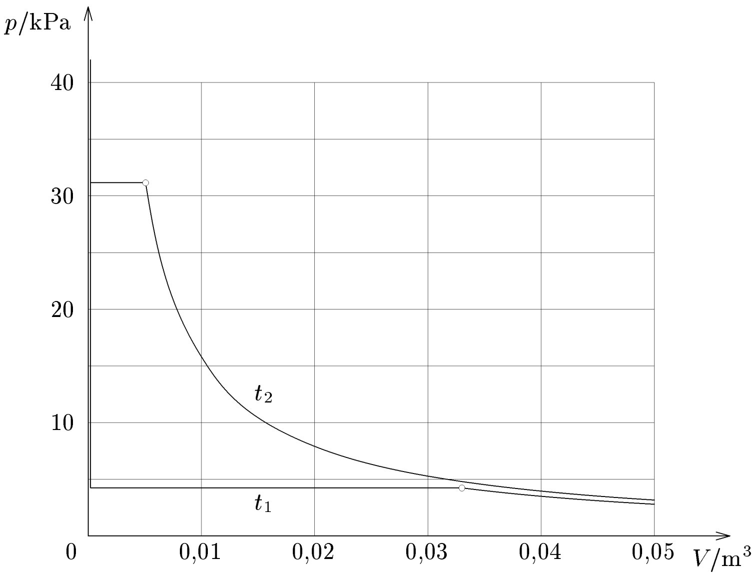
$t_2 = 70\ ^\circ\mathrm{C}$

V/m^3	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
p/Pa	15823	7915,1	5277,6	3958,5	3166,9
$p^\star/\mathrm{Pa}$	15837	7918,7	5279,1	3959,4	3167,5

Pro $V < V_2$ jsou páry nasycené a $p = p_2 = konst.$

Izotermy pro obě teploty jsou na obr. R5.

5 bodů



Obr. R5