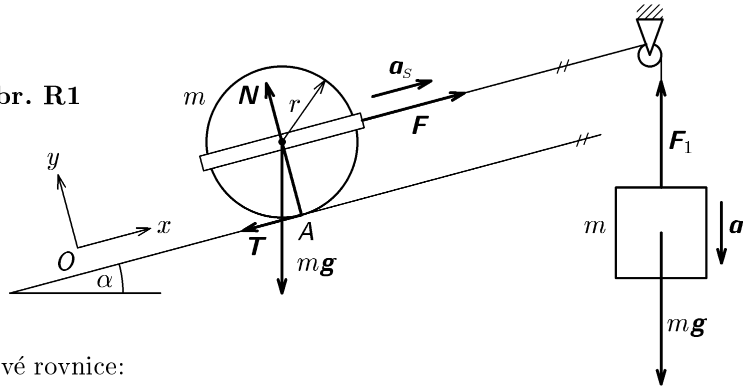
Řešení teoretických úloh celostátního kola 39. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: B. Vybíral (1, 3, 4), P. Šedivý (2)

1. a) Vyjdeme z obr. R1. Pohyb válce popíšeme ve vztažné soustavě O, x, y, kde osa x je rovnoběžná s nakloněnou rovinou a osa y je k ní kolmá. Můžeme-li zanedbat hmotnost lanka a kladky, jsou síly, kterými působí lanko na závaží a na válec, stejně velké: $F_1 = F$.

Obr. R1



Pohybové rovnice:

Závaží:
$$ma = mg - F \qquad (1)$$

Válec:
$$\left\{\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= F - T - mg\sin\alpha && (2)\\ m\ddot{y}_S &= N - mg\cos\alpha && (3)\\ \frac{mr^2}{2}\varepsilon &= Tr && (4)\end{aligned}\right.$$

Avšak $y_S = r = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{y}_S = 0$. Pak $a_S = \ddot{x}_S$ a z (3) plyne

$$N = mg\cos\alpha\,. \qquad (5)$$

Protože délka lanka je konstantní, pohybuje se závaží stejně rychle jako hmotný střed válce a platí

$$a_S = a\,. \qquad (6)$$

3 body

b) Při dokonalém odvalování je bod A pól pohybu a platí

$$\varepsilon = \frac{a}{r}\,. \qquad (7)$$

Pohybové rovnice upravíme na:

$$ma = mg - F \qquad (8)$$

$$
\begin{aligned}
ma &= F - T - mg\sin\alpha && (9)\\
\frac{mr}{2}a &= Tr && (10)
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy dostaneme:

$$a = a_S = \frac{2}{5}g(1-\sin\alpha)\,, \qquad \varepsilon = \frac{2g}{5r}(1-\sin\alpha)\,, \tag{11}$$

$$T = \frac{mg}{5}(1-\sin\alpha)\,, \qquad F = \frac{mg}{5}(3+2\sin\alpha)\,. \tag{12}$$

Pro dané hodnoty
$N = 8{,}5$ N, $a = 1{,}96\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\varepsilon = 19{,}6\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, $T = 0{,}98$ N, $F = 7{,}8$ N.

3 body

c) Aby nedošlo k prokluzu, musí být $T < fN$, neboli

$$\frac{mg}{5}(1-\sin\alpha) < fmg\cos\alpha\,, \qquad f > \frac{1-\sin\alpha}{5\cos\alpha}\,. \tag{13}$$

Pro dané hodnoty $f > 0{,}12$.

1 bod

d) Není-li splněna podmínka (13), válec v bodě A prokluzuje a platí

$$T' = fN' = fmg\cos\alpha\,. \tag{14}$$

rotože bod A již není pólem pohybu, neplatí vztah (7). Řešením pohybových rovnic (1) až (4) dostaneme:

$$ma' = m(g-a') - fmg\cos\alpha - mg\sin\alpha\,, \quad a' = a'_S = \frac{g(1-f\cos\alpha-\sin\alpha)}{2}\,, \tag{15}$$

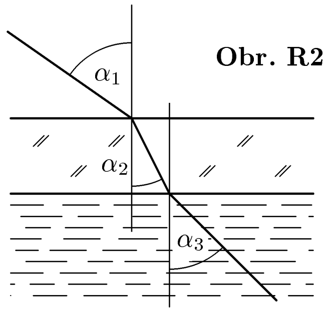
$$F' = m(g-a') = \frac{mg}{2}(1+f\cos\alpha+\sin\alpha)\,, \quad \varepsilon' = \frac{2T'}{mr} = \frac{2fg\cos\alpha}{r}\,. \tag{16}$$

Pro dané hodnoty
$N' = 8{,}5$ N, $a' = 2{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\varepsilon' = 13{,}6\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, $T' = 0{,}68$ N, $F' = 7{,}7$ N.

3 body

2. Úlohu budeme řešit, jako kdyby optická osa objektivu fotoaparátu procházela středem baňky. (Na snímku to sice není přesně splněno, ale kdybychom aparát posunuli svisle dolů přesně proti středu baňky, rozměry jednotlivých detailů snímku by se nezměnily.)

a) Stěna baňky má nepatrnou tloušťku v porovnání s jejím poloměrem. Paprsek prochází stěnou ze vzduchu do vody jako tenkou planparalelní deskou (obr. R2). Platí:



Obr. R2

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} &= \frac{n_2}{n_1}\\[2ex] \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} &= \frac{n_3}{n_2}\end{aligned}\right\}\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_1}\,.$$

Můžeme proto chod paprsku popsat, jako by se lámal přímo ze vzduchu do vody nebo naopak. Index lomu skla se neuplatní.

1 bod

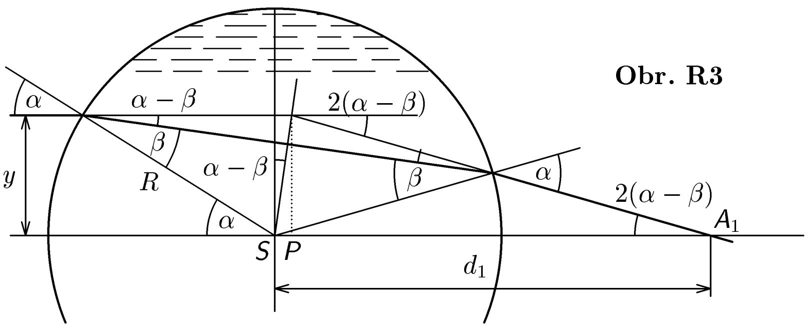
Paprsky procházející baňku ve směru optické osy objektivu se lámou podle obr. R3. Zvolme paprsek, který je před dopadem na baňku ve vzdálenosti y od optické osy. Platí:

$$\sin\alpha = n\sin\beta\,, \qquad d_1 = |SP| + |PA_1| = y\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + \frac{y}{\mathrm{tg}\,[2(\alpha-\beta)]}\,. \quad (1)$$

Pro $y \ll R$ jsou úhly α, β velmi malé a můžeme psát:

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{y}{R}\,, \qquad \beta \doteq \sin\beta = \frac{y}{nR}\,,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) \doteq \alpha-\beta \doteq y\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{nR}\right)\,, \qquad \mathrm{tg}\,[2(\alpha-\beta)] \doteq 2y\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{nR}\right)\,,$$



Obr. R3

Po dosazení do (1) dostaneme

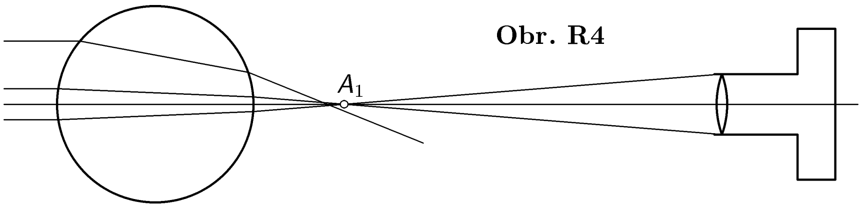
$$d_1 \doteq y^2 \frac{n-1}{nR} + \frac{nR}{2(n-1)} \,.$$

Pro $y \ll R$ však můžeme první člen výrazu zanedbat. Paprsky, které přicházejí z bodu A protější budovy ležícího na optické ose a jdou blízko středu baňky, se soustředí v bodě A_1 na optické ose, jehož vzdálenost od středu baňky je

$$d_1 = \frac{nR}{2(n-1)} = 135\,\mathrm{mm} \,.$$

3 body

Zde vznikne převrácený zmenšený skutečný obraz budovy, který se na fotografii jeví jako poměrně kvalitní. Z paprsků přicházejících na baňku ve směru optické osy proniknou totiž do objektivu fotoaparátu jen ty nejbližší k optické ose. Vzdálenější paprsky, které by způsobily sférickou vadu, se neuplatní (obr. R4). **1 bod**

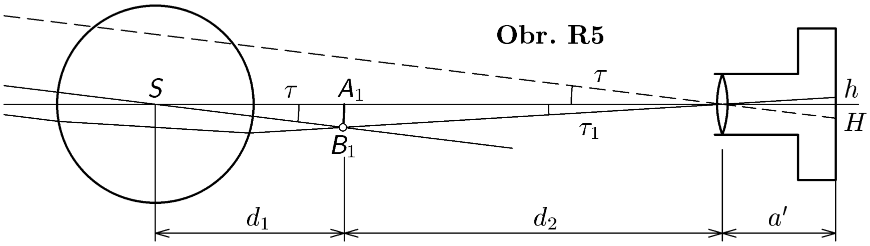


Obr. R4

b) Zorné úhly τ, τ_1, pod kterými vidíme ze středu objektivu úsečku AB na budově a její obraz A_1B_1 vytvořený baňkou, jsou (obr. R5):

$$\tau = \frac{y_1}{d_1} = \frac{H}{a'} \,, \qquad \tau_1 = \frac{y_1}{d_2} = \frac{h}{a'} \,.$$

Z toho plyne: $\dfrac{\tau}{\tau_1} = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{H}{h} \,, \qquad d_2 = \dfrac{d_1 H}{h} = 964\,\mathrm{mm} \,.$ **2 body**



Obr. R5

c) Vzdálenost a' roviny filmu od středu objektivu určíme podle obr. R6. Platí:

$$\sin\varphi = \frac{R}{d_1 + d_2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\varrho}{a'} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}\,,$$

$$a' = \frac{\varrho\sqrt{1-\dfrac{R^2}{(d_1+d_2)^2}}}{\dfrac{R}{d_1+d_2}} = \frac{\varrho\sqrt{(d_1+d_2)^2-R^2}}{R} \doteq 115\,\mathrm{mm}\,.$$

Ohniskovou vzdálenost objektivu určíme pomocí zobrazovací rovnice čočky:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\,,$$

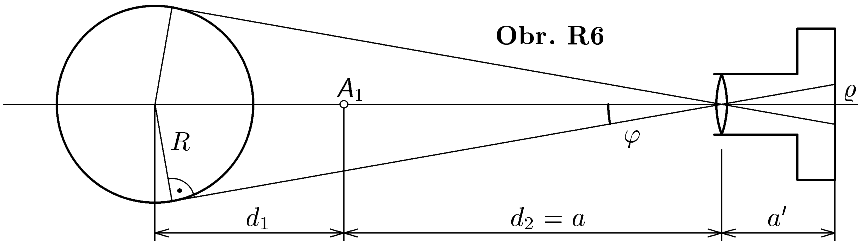
kde $a = d_2$, neboť je zaostřeno na bod A_1. Tedy

$$f = \frac{a'd_2}{a'+d_2} \doteq 100\,\mathrm{mm}\,.$$

(Mezivýsledky počítány přesněji, zaokrouhlen až konečný výsledek.)

3 body

Obr. R6



Úlohu a) můžeme také řešit dvojím použitím zobrazovací rovnice kulového rozhraní. První rozhraní zobrazí bod A do bodu A', druhé rozhraní zobrazí bod A' do bodu A_1 (obr. R7). Pro první rozhraní platí:

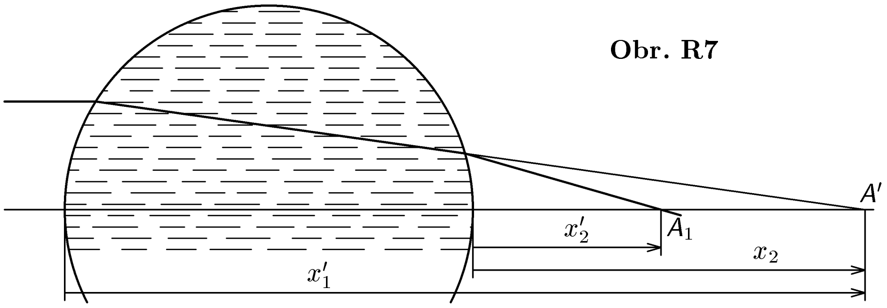
$$-\frac{1}{x_1}+\frac{n}{x_1'}=\frac{n-1}{R} \qquad x_1=\infty\,, \quad x_1'=\frac{nR}{n-1}\,,$$

pro druhé rozhraní dostaneme:

$$-\frac{n}{x_2}+\frac{1}{x_2'}=\frac{n-1}{R}\,, \qquad x_2=\frac{nR}{n-1}-2R=\frac{R(2-n)}{n-1}\,,$$

$$\frac{1}{x_2'}=\frac{n(n-1)}{R(2-n)}+\frac{n-1}{R}=\frac{2(n-1)}{R(2-n)}\,, \qquad x_2'=\frac{R(2-n)}{2(n-1)}\,.$$

Vzdálenost bodu A_1 od středu baňky je $d_1=x_2'+R=\dfrac{nR}{2(n-1)}$.



Obr. R7

3.a) Výslednou intenzitu v bodě A na kladné poloose x určíme jako vektorový součet intenzit d$\boldsymbol{E}_c$ vyvolaných všemi částečnými náboji dQ na kroužku (obr. R8). Všechny složky d$\boldsymbol{E}_\perp$ kolmé k ose x se vzájemně vyruší a uplatní se jen složky d$\boldsymbol{E}$ rovnoběžné s osou x. Platí:

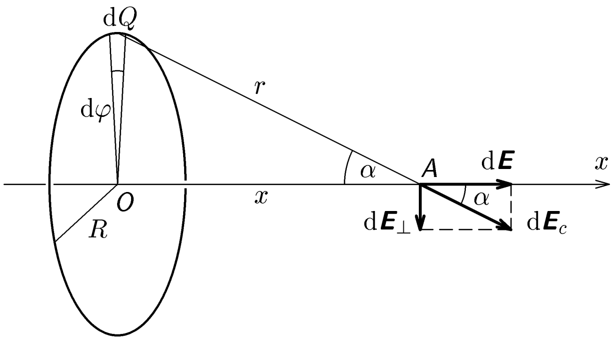
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\,, \qquad \mathrm{d}Q = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$E = \frac{Qx}{8\pi^2\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\varphi = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vektor $\boldsymbol{E}$ leží v ose x a pro $x>0$ má směr kladný. Pro $x<0$ má intenzita směr opačný a při výpočtu její velikosti bychom museli počítat s $|x|$.

3 body

Obr. R8

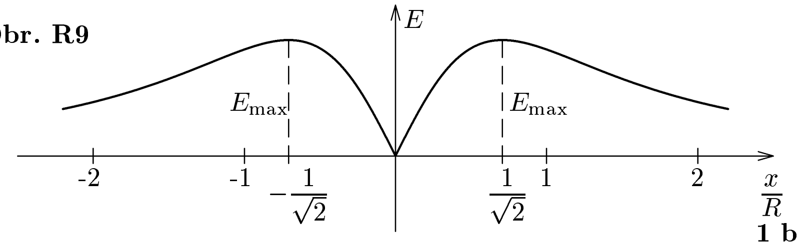


Podmínka pro extrém: $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{R^2-2x^2}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0$

je splněna pro $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, extrémní hodnota je $E_{\max} = \dfrac{Q}{6\pi\varepsilon_0\sqrt{3}R^2}$.

2 body

Obr. R9



1 bod

b) Potenciální energii částice v elektrickém poli kroužku můžeme ve velké vzdálenosti ($x \to \infty$) považovat za nulovou. Uprostřed kroužku pak bude mít částice potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = q \int\limits_0^\infty E \,\mathrm{d}\, x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^\infty \frac{x \,\mathrm{d}\, x}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Po substituci: $R^2 + x^2 = z \qquad 2x \,\mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, z$ dostaneme:

$$E_\mathrm{p} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \int\limits_{R^2}^\infty z^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}\, z = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \left[-2z^{-\frac{1}{2}} \right]_{R^2}^\infty = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} \,.$$

Má-li částice dosáhnout středu kroužku, musí získat stejně velkou počáteční kinetickou energii. Proto

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} \,, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 R m}} \,.$$

Bude-li počáteční rychlost částice nepatrně větší, proletí středem kroužku na druhou stranu a ve velké vzdálenosti od něj opět získá rychlost $\boldsymbol{v}_0$. Bude-li nepatrně menší, částice se vrátí zpět a ve velké vzdálenosti od kroužku bude mít rychlost $-\boldsymbol{v}_0$. **4 body**

4.a) Ve vrcholech krychlové buňky o hraně d jsou umístěny čtyři ionty Cl^- a čtyři ionty Na^+. Každý vrchol je však společný osmi buňkám. Proto na jednu buňku připadá jenom polovina molekuly NaCl a na jednu molekulu připadá objem $2d^3$. Tentýž objem určíme jako podíl molárního objemu a Avogadrovy konstanty:

$$2d^3 = \frac{V_\mathrm{m}}{N_A} = \frac{M_\mathrm{m}}{\varrho N_\mathrm{A}}\,,$$

$$M_\mathrm{m} = [A_\mathrm{r}(\mathrm{Na}) + A_\mathrm{r}(\mathrm{Cl})] \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} = 58{,}443\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}\,.$$

Z toho:

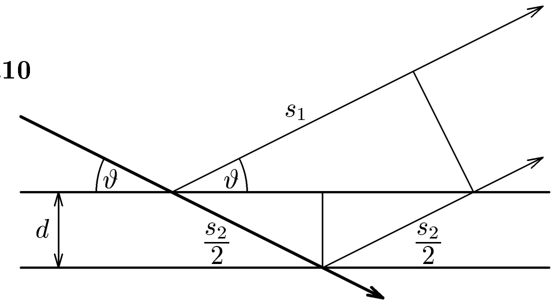
$$d = \sqrt[3]{\frac{M_\mathrm{m}}{2N_\mathrm{A}\,\varrho}} = 2{,}82 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

b) Dráhový rozdíl sousedních odražených paprsků je podle obr. R10:

$$\delta = s_2 - s_1 = 2\frac{d}{\cos\vartheta} - 2\frac{d}{\mathrm{tg}\,\vartheta}\cos\vartheta = \frac{2d}{\sin\vartheta}(1-\cos^2\vartheta) = 2d\sin\vartheta\,.$$

Obr. R10



Maximum nastane pro $\delta = k\lambda$, $k = 1, 2, 3\ \ldots$.
Pro první maximum: $\lambda = 2d\sin\vartheta_1 = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ m.
Pro další maxima:

$$\sin\vartheta = \frac{k\lambda}{2d} = k\sin\vartheta_1 \left\{ \begin{array}{lcll} \vartheta_2 & = & 33{,}0^\circ & \text{pro } k=2 \\ \vartheta_3 & = & 55{,}0^\circ & \text{pro } k=3 \end{array} \right.$$

4 body

c) Rentgenové záření vzniká dopadem elektronů urychlených napětím U na anodu. Pokud se veškerá energie elektronu eU přemění na energii fotonu záření, platí

$$eU = hf = h\frac{c}{\lambda}\,. \quad \text{Z toho} \quad U_\mathrm{min} = \frac{hc}{e\lambda} = 8{,}05\ \mathrm{kV}\,.$$

3 body