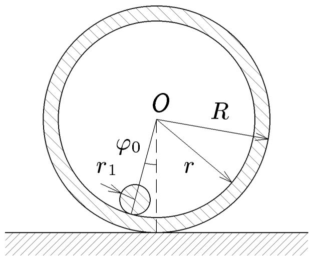
Úlohy 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Homogenní dutý válec o vnějším poloměru R a vnitřním poloměru r leží na vodorovné hladké rovině. Na vnitřní stěnu válce jsme přilepili rovnoběžně s osou válce válcové závaží o hmotnosti m_1 a poloměru r_1 a válec jsme nepatrně odvalili z rovnovážné polohy tak, že se pootočil jen o malý úhel φ_0 (obr. 1). Po uvolnění konal válec téměř netlumené kmity s periodou T okolo rovnovážné polohy.

Obr. 1



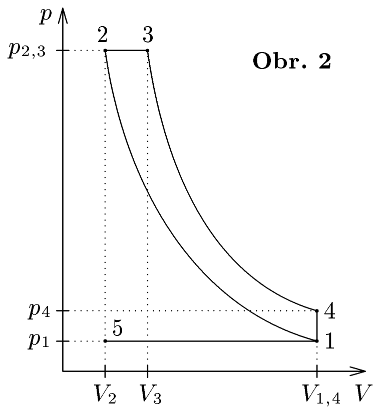
a) Určete amplitudu Ω_m úhlové rychlosti válce a amplitudu v_m rychlosti postupného pohybu jeho osy při kmitání.

b) Určete moment setrvačnosti J_0 válce vzhledem k rotační ose souměrnosti a jeho hmotnost m.

Řěšte obecně a pro hodnoty: $R = 250$ mm, $r = 230$ mm, $m_1 = 0{,}500$ kg, $r_1 = 30$ mm, $\varphi_0 = 5°$, $T = 4{,}5$ s.

Moment servačnosti dutého homogenního válce vzhledem k rotační ose symetrie je $J_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$.

2. Na obr. 2 je znázorněn teoretický pracovní diagram čtyřdobého vznětového (*Dieselova*) motoru. Motor pracuje tak, že do vzduchu, který byl zahřát na vysokou teplotu adiabatickou kompresí (1 – 2), se při expanzi po krátkou dobu vstřikuje palivo, které izobaricky hoří (2 – 3), načež se plyn dále rozpíná adiabaticky (3 – 4) a nakonec opustí pracovní prostor a je nahrazen novým vzduchem (4 – 1 – 5 – 1). Poslední část pracovního cyklu je ekvivalentní izochorickému ději (4 – 1). Podíl $\varepsilon = V_1/V_2$ se nazývá *kompresní poměr* a podíl $\varphi = V_3/V_2$ je *plnicí poměr* motoru.



Obr. 2

Předpokládáme, že vzduch a produkty hoření se chovají jako ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pro který platí stavová rovnice. Měrná tepelná kapacita takového plynu je $c_V = 2{,}5R_m/M_m$, kde R_m je molární plynová konstanta a M_m je molární hmotnost plynu. Pro adiabatické děje platí *Poissonův zákon* $pV^\varkappa = \mathrm{konst}$, kde $\varkappa = c_p/c_V$ je Poissonova konstanta.

a) Stanovte hodnoty stavových veličin p, T v bodech 2, 3 a 4 pracovního diagramu, jsou-li dány hodnoty p_1 a T_1 v bodě 1 a je-li znám kompresní a plnicí poměr motoru.

b) Stanovte teplo Q_1 přijaté a teplo Q_2' odevzdané pracovní látkou během jednoho cyklu a určete tomu odpovídající teoretickou účinnost motoru.

c) Dokažte, že pro teoretickou účinnost tohoto motoru platí vztah

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa-1}}{\varphi - 1} .$$

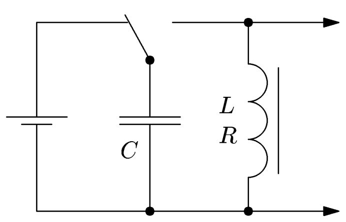
Úlohy a), b) řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $p_1 = 0{,}100$ MPa, $V_1 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, $T_1 = 300$ K, $\varkappa = 1{,}40$, $\varepsilon = 20{,}0$, $\varphi = 1{,}80$.

3. Kondenzátor o kapacitě $C = 1{,}00\ \mu$F byl v zapojení podle obr. 3 nabit z ploché baterie a potom připojen k cívce. Počítačový záznam časového průběhu napětí na cívce od okamžiku připojení kondenzátoru je na obr. 4. Je popsán funkcí

$$u = U_\mathrm{m} \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi_0) ,$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\delta = \frac{R}{2L}$,

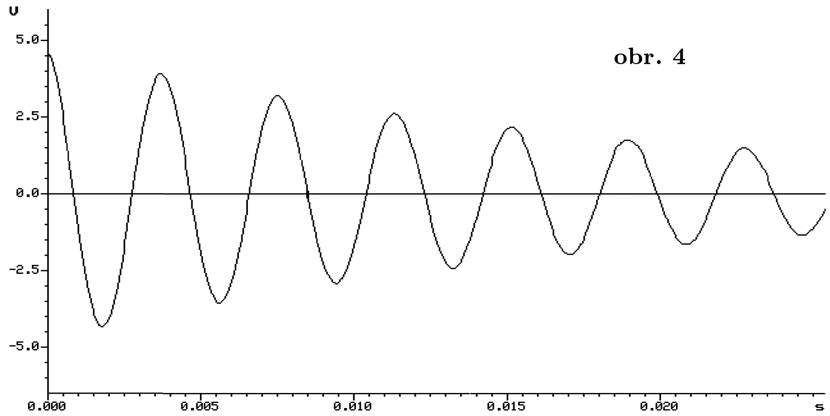
obr. 3



L je indukčnost ideální cívky a R rezistance ideálního rezistoru, jejichž seriovým spojením bychom mohli danou skutečnou cívku nahradit.

a) Určete L a R.

b) V kterém okamžiku procházel obvodem největší proud a jaká byla jeho velikost?



obr. 4

4. Měděné vinutí o hmotnosti m dokonale tepelně izolované od okolí mělo při teplotě t_1 odpor R_1. Měrná tepelná kapacita mědi je c. Po připojení ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e a zanedbatelném vnitřním odporu se teplota t vinutí měnila v závislosti na době τ, po kterou procházel elektrický proud. Určete tuto závislost a sestrojte její graf v intervalu $\langle 0,\ \tau_1 \rangle$. Předpokládáme, že v daném intervalu lze závislost odporu na teplotě vyjádřit vztahem $R = R_0(1 + \alpha t)$, kde R_0 je odpor při teplotě 0 °C a α je teplotní součinitel odporu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 4{,}5$ g, $t_1 = 20$ °C,
$R_1 = 12{,}8\ \Omega$, $c = 893\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, $\tau_1 = 600$ s, $\alpha = 4{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$, $U_e = 5{,}0$ V.

5. Dvě tenké čočky vzdálené od sebe 2,5 cm tvoří centrovanou optickou soustavu. Předmět vysoký 2,0 cm umístěný ve vzdálenosti 5,0 cm před první čočkou je celou soustavou zobrazen ve vzdálenosti 20,0 cm za druhou čočkou, kde vzniká převrácený skutečný obraz vysoký 12,0 cm. Určete ohniskové vzdálenosti obou čoček.

a) Zadání pečlivě narýsujte na samostatný list papíru a úlohu vyřešte graficky. Řešení popište.

b) Úlohu řešte početně.

6. *Praktická úloha.* **Ověření Stefanova – Boltzmannova zákona** *Teorie:*

Vlákno žárovky se přibližně chová jako černé těleso, jehož intenzita vyzařování je určena Stefanovým–Boltzmannovým zákonem.

$$M_e = \frac{\Phi_\mathrm{e}}{S} = \sigma T^4\,, \qquad \text{kde } \sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}\,.$$

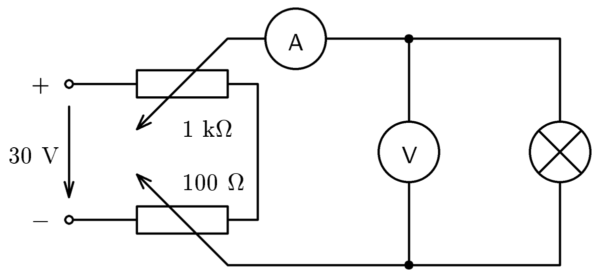
Zářivý tok žárovky Φ_e je prakticky stejný jako její elektrický příkon $P = UI$.

Předpokládejte, že závislost odporu vlákna žárovky na teplotě je přibližně lineární a můžeme ji vyjádřit vztahem $R = R_1(1 + \alpha\Delta t)$, kde R_1 je odpor při vztažné teplotě t_1, $\Delta t = t - t_1$ je změna teploty a α je teplotní součinitel odporu. Zvolíme-li vztažnou teplotu mezi 15°C a 25 °C, má wolframový drát, ze kterého je vyrobeno vlákno žárovky, teplotní součinitel odporu $\alpha = 4{,}4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$.

V naší úloze použijeme malou žárovku s jmenovitými hodnotami napětí a proudu $U_\mathrm{jm} = 24$ V, $I_\mathrm{jm} = 0{,}1$ A, která se běžně prodává v elektrotechnických prodejnách.

Úkol:

a) V zapojení podle obr. 5 změřte pečlivě závislost proudu, který prochází žárovkou, na připojeném napětí. Z výsledků měření určete, jak se s rostoucím napětím mění příkon žárovky a odpor jejího vlákna.



Obr. 5

b) Sestrojte graf závislosti odporu žárovky na napětí a z něj stanovte odpor vlákna při nulovém napětí, kdy je teplota vlákna stejná jako teplota okolí.

c) Určete, jak se s rostoucím napětím mění teplota vlákna žárovky. Potřebný vztah odvoďte. Za vztažnou teplotu zvolte teplotu laboratoře.

d) Ověřte, že při napětí větším než 5 V, kdy se téměř celá dodaná energie vyzáří, je poměr P/T^4 konstantní.

e) Stanovte plošný obsah části povrchu dokonale černého tělesa, která by při zjištěných teplotách zářila stejně jako daná žárovka.

Výsledky měření a výpočtů zapište do tabulky:

U/V	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	5,0	10	15	20	25
I/mA											
R/Ω											
P/W											
T/K											
$P \cdot T^{-4}$											

Poznámka: První část měření (do 1 V) slouží především k určení odporu žárovky R_1 při teplotě okolí; v druhé části (od 5 V) ověříme Stefanův–Boltzmannův zákon.

7. Částice o hmotnosti m_1 nalétá rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ na částici o hmotnosti m_2, která je původně v klidu. Po pružné srážce získá částice o hmotnosti m_1 rychlost $\boldsymbol{v}_1'$ a odkloní se od směru dopadu o úhel α_1.

a) Určete velikost v_1' rychlosti první částice po odrazu za předpokladu, že úhel odklonu $\alpha_1 = 0°$ nebo $\alpha_1 = 180°$ (centrální ráz).

b) Vyjádřete relativní ztrátu kinetické energie první částice při centrálním rázu jako funkci poměru hmotností $\mu = \dfrac{m_1}{m_2}$. Relativní ztráta kinetické energie η je definována vztahem

$$\eta = \frac{E_1 - E_1'}{E_1}\,,$$

kde E_1 je kinetická energie částice před rázem a E_1' je kinetická energie po rázu. Závislost $\eta = \eta(\mu)$ na poměru obou hmotností znázorněte graficky.

c) Určete rychlost $\boldsymbol{v}_1'$ první částice po rázu, je-li odkloněna o úhel $\alpha_1 = 90°$. Jaký musí být poměr μ obou hmotností, aby byl tento úhel dosažitelný?

d) Stanovte relativní ztrátu kinetické energie první částice pro úhel odklonu $\alpha_1 = 90°$. Závislost $\eta = \eta(\mu)$ na poměru obou hmotností znázorněte graficky.

e) Na základě vztahů pro η z úloh b) a d) vysvětlete, proč se pro zpomalování neutronů v atomovém reaktoru využívá jejich srážek s lehkými atomy, např. s atomy vodíku.

Řešte nejprve obecně. Předpokládejte, že nejsou překročeny meze platnosti zákonů klasické mechaniky. Úlohy a) až c) řešte také číselně pro hodnoty $m_1 = 4{,}00\ \mathrm{m_u}$, $m_2 = 14{,}00\ \mathrm{m_u}$, $v_1 = 1{,}5 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (srážka částice α s atomem dusíku).