Řešení úloh regionálního kola 38. ročníku FO, kat. D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4), I. Volf (2)

1. úloha

a) Vyjdeme z kinematických zákonů rovnoměrně zpomaleného pohybu:

$$v = v_0 - at\,, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,.$$

V čase t_0 se puk zastaví. Platí tedy $0 = v_0 - at_0$. Z toho:

$$t_0 = \frac{v_0}{a}\,, \qquad s_0 = v_0 t_0 - \frac{1}{2}at_0^2 = \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{v_0^2}{2a}\,,$$

$a = \dfrac{v_0^2}{2s_0} = 0{,}82\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,, \qquad t_0 = \dfrac{2s_0}{v_0} = 17\ \mathrm{s}\,.$ **2 body**

b) Platí:

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}\,.$$

Po dosazení za a z úlohy a) a po úpravě máme $f = \dfrac{v_0^2}{2gs_0} = 0{,}083\,.$ **2 body**

c) Platí:

$$s_1 = v_0\frac{t_0}{2} - \frac{1}{2}a\left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = s_0 - \frac{s_0}{4} = \frac{3}{4}s_0\,.$$

Po dosazení $s_1 = 90\ \mathrm{m}\,.$ **2 body**

d) Platí: $\dfrac{1}{2}s_0 = \dfrac{1}{2}at_2^2$, kde t_2 je doba pohybu na druhé polovině dráhy. Z rovnice plyne $t_2 = \sqrt{\dfrac{s_0}{a}}$. Dále je $v_1 = at_2 = \sqrt{as_0}$, kam nyní dosadíme zrychlení z úlohy a). Dostaneme $v_1 = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}} = 9{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$ **2 body**

e) Platí:

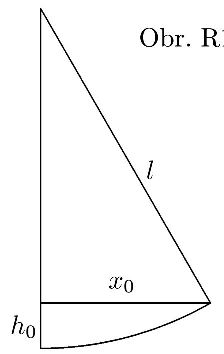
$$t_1 = t_0 - t_2 = \frac{2s_0}{v_0} - \sqrt{\frac{s_0}{a}}\,,$$

kde po dosazení za zrychlení a z úlohy a) a po úpravě máme
$t_1 = (2 - \sqrt{2})\dfrac{s_0}{v_0} = 5{,}0\ \mathrm{s}\,.$ **2 body**

2. úloha

a) Vychýlením kuličky do vzdálenosti x_0 od stěny ji současně zvedneme do výšky (obr. R1)

$$h_0 = l - \sqrt{l^2 - x_0^2} = 0{,}0762\ \mathrm{m}\,.$$



Obr. R1

Po prvním odrazu kulička vystoupí do výšky

$$h_1 = l - \sqrt{l^2 - x_1^2} = 0{,}0506\ \mathrm{m}\,.$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$v_0 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2g\left(l - \sqrt{l^2 - x_0^2}\right)} = 1{,}22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2g\left(l - \sqrt{l^2 - x_1^2}\right)} = 1{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

4 body

Koeficient restituce je

$$k = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - x_1^2}}{l - \sqrt{l^2 - x_0^2}}} = 0{,}81\,.$$

2 body

b) Po druhém odrazu kulička vystoupí do výšky

$$h_2 = l - \sqrt{l^2 - x_2^2}\,.$$

Platí:

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\,, \quad h_2 = h_1 k^2 = 0{,}0335\ \mathrm{m}\,, \quad x_2 = \sqrt{l^2 - (l - h^2)^2} = 40\ \mathrm{cm}\,.$$

4 body

3. úloha

a) Vztlaková síla působící na těleso je podle Archimédova zákona přímo úměrná objemu zcela ponořeného tělesa. Velikosti vztlakových sil působících na předmět a na závaží jsou stejné, je-li objem tělesa roven objemu závaží neboli hustota tělesa je rovna hustotě závaží (stačí jeden důvod). Nerovnost $m < m_0$ nastane, působí-li větší vztlaková síla na závaží, tj. jeho objem je větší než objem předmětu, neboli hustota závaží je menší než hustota předmětu (stačí jeden důvod).
1 bod

b) Z rovnosti velikostí výslednic tíhové a vztlakové síly působících na předmět a závaží

$$m_1 g - \varrho V_1 g = m_0 g - \varrho V_0 g \,, \qquad \text{kde } V_0 = \frac{m_0}{\varrho_0} \,,$$

plyne

$$m_1 = m_0 + \varrho \left(V1 - \frac{m_0}{\varrho_0} \right) .$$

Číselně vychází $m_1 = 0{,}161$ kg. **3 body**

c) Obdobně ze stejné podmínky

$$m_2 g - \varrho \frac{m_2}{\varrho_2} g = m_0' g - \varrho \frac{m_0'}{\varrho_0} g$$

plyne

$$m_2 = m_0' \frac{\varrho_2 (\varrho_0 - \varrho)}{\varrho_0 (\varrho_2 - \varrho)} \,.$$

Číselně vychází $m_2 = 1{,}19$ kg. **3 body**

d) Jelikož vztlaková síla působící na hračku je větší než její tíhová síla, přivážeme ji k misce se závažím a vyvážíme závažím položeným na tutéž misku.
1 bod

e) Z rovnosti velikostí výslednic vztlakové a tíhové síly působících na předmět a závaží

$$\varrho \frac{m_3}{\varrho_3} g - m_3 g = m_0'' g - \varrho \frac{m_0''}{\varrho_0} g$$

plyne

$$m3 = m_0'' \frac{\varrho_3 (\varrho_0 - \varrho)}{\varrho_0 (\varrho - \varrho_3)} \,.$$

Číselně vychází $m_2 = 0{,}64$ kg. **2 body**

4. úloha

a) Označme h počáteční výšku těžiště hranolu nad vodorovnou rovinou a r poloměr otáčení těžiště kolem podstavné hrany. Pak práce nutná k převrácení hranolu je

$$W = mg(r-h) = \varrho a^2 bg \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - \frac{b}{2} \right) = 410\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

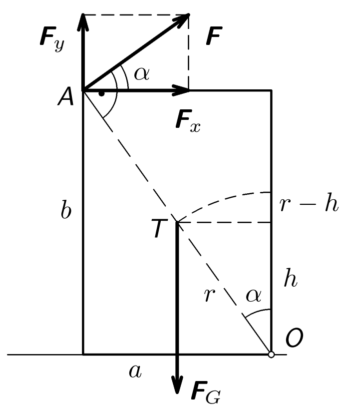
b) Hranol nejsnáze převrátíme silou působící v nejvzdálenějším bodě od osy otáčení (tj. v bodě A), jejíž směr je neustále kolmý k rameni $2r$ (Obr. R2). Uvedená síla je maximální v počátečním okamžiku, během převracení klesá, neboť se zmenšuje rameno tíhové síly.

V počátečním okamžiku je pro velikost hledané síly F splněna momentová věta

$$F \cdot 2r = F_G \frac{a}{2}\,,$$

kde $F_G = \varrho a^2 bg\,, \quad 2r = \sqrt{a2 + b2)}\,.$

Po dosazení a úpravě máme



Obr. R2

$$F = \frac{F_G a}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\varrho a^3 bg}{2\sqrt{a^2+b^2}} = 1580\ \mathrm{N}\,.$$

4 body

c) Sílu $\boldsymbol{F}$, kterou na hranol působíme, rozložíme na vodorovnou složku F_x a na svislou složku $\boldsymbol{F}_y$. Aby hranol neproklouznul, musí být splněna podmínka $F_x < f(F_G - F_y)\,,$ kde v počáteční poloze platí

$$F_x = F\cos\alpha = F\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad F_y = F\sin\alpha = F\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme $f > \dfrac{ab}{a^2+2b^2} = 0{,}19\,.$ **4 body**