ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie D

1. a) b) Celkovou dráhu s proběhl běžec za dobu t. Dráhu prvního úseku s_1 proběhl se zrychlením a za dobu t_1. Dráhu druhého úseku $s-s_1$ proběhl rychlostí v_2 za dobu $t-t_1$. Platí vztahy

$$v_2 = at_1\,, \quad s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_2 t_1}{2} = \frac{v_2^2}{2a}\,, \quad s - s_1 = v_2\,(t - t_1)\;.$$

2 body

Z toho: $$s - s_1 = v_2 t - v_2 t_1 = v_2 t - 2s_1\,, \qquad v_2 = \frac{s + s_1}{t}\,,$$

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_2} = \frac{2s_1 t}{s + s_1}\,, \qquad a = \frac{v_2}{t_1} = \frac{(s + s_1)^2}{2s_1 t^2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $v_2 = 10{,}90\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t_1 = 5{,}50\ \mathrm{s}$, $a = 1{,}98\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3 body

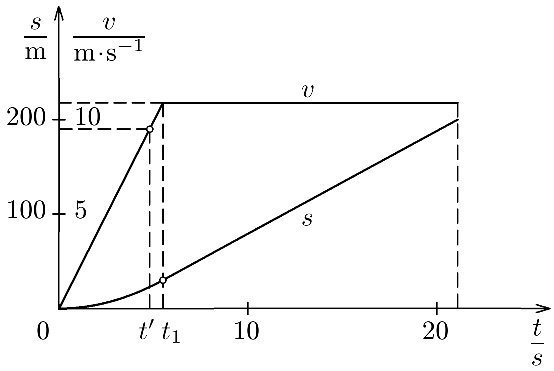
c) Průměrná rychlost celého pohybu byla $v_\mathrm{p} = s/t = 9{,}48\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Této rychlosti běžec dosáhl na prvním úseku dráhy v čase

$$t' = \frac{v_p}{a} = \frac{2ss_1 t}{(s + s_1)^2} = 4{,}79\ \mathrm{s}\,.$$

Poznámka: Náš model je oproti skutečnému pohybu značně zjednodušen a vypočítané hodnoty s výjimkou průměrné rychlosti platí jen přibližně.

2 body

d)



Obr. R1

3 body

2. a) V bazénu urazí plavec dráhu $s_0 = 200$ m rychlostí v za dobu $t_0 = s_0/v$. V řece urazí plavec vyměřenou dráhu $s_0/2$ po proudu za dobu t_1 a proti proudu za dobu t_2. Pro celkovou dobu t dostaneme:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\frac{s_0}{2}}{v+u} + \frac{\frac{s_0}{2}}{v-u} = \frac{s_0 v}{v^2 - u^2} = \frac{t_0}{1 - \frac{u^2}{v^2}} \,.$$

Pro $0 < u < v$ vychází $t > t_0$. **2 body**

b) $t = 2t_0 \,,$ jestliže $\frac{u^2}{v^2} = \frac{1}{2} \,, \quad v = u\sqrt{2} \,.$ **3 body**

c) Jestliže $u = v/2$, platí

$$t = t' = \frac{t_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} t_0 \,.$$

Za dobu t' urazí plavec vzhledem k vodě dráhu

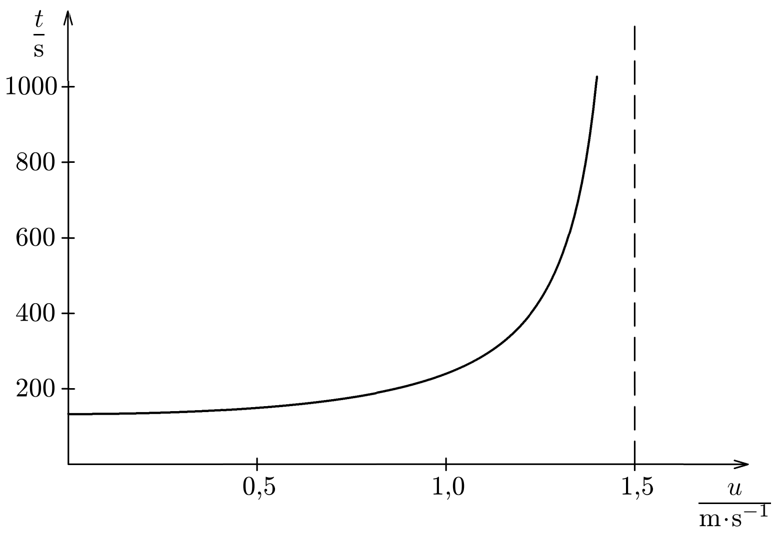
$$s' = vt' = \frac{4}{3} v t_0 = \frac{4}{3} s_0 = 267 \text{ m} \,.$$

2 body

d) Dosazením číselných hodnot dostaneme:

$$\{t\} = \frac{\{s_0\}\{v\}}{\{v\}^2 - \{u\}^2} = \frac{300}{2{,}25 - \{u\}^2} \,.$$

Graf:



Tabulka k sestrojení grafu:

$u/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
t/s	133	136	144	159	186	240	370	1034

3 body

3. a) Tahová síla motoru je podle 2. pohybového zákona rovna časové změně hybnosti plynů vytékajících z rakety:

$$F = \frac{|\Delta m| \cdot u}{\Delta t} = Q_m \cdot u\,. \qquad \text{Z toho} \qquad Q_m = \frac{F}{u} = 11\,628\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Zrychlení v okamžiku startu mělo velikost

$$a_0 = \frac{F}{m_0} - g = 2{,}09\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

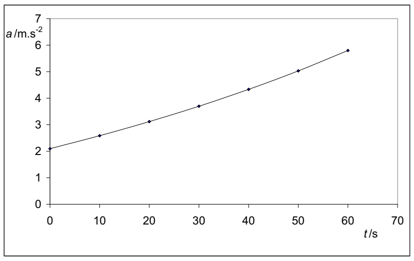
1 bod

c) Závislost velikosti zrychlení na čase vyjadřuje vztah:

$$a = \frac{F}{m} - g = \frac{F}{m_0 - Q_m t} - g\,.$$

Graf je na obr. R2 .

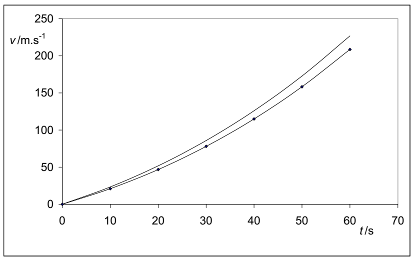
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{a}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$	$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{s}{\mathrm{m}}$
0	2,095	0	0
10	2,585	20,95	105
20	3,117	46,80	443
30	3,697	77,97	1067
40	4,332	114,95	2031
50	5,029	158,27	3398
60	5,799	208,56	5232



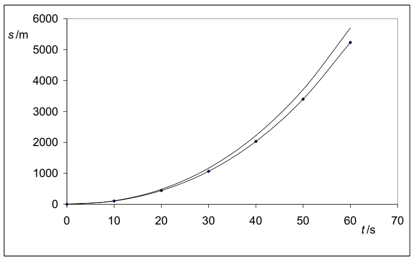
Obr. R2

2 body

d) Výsledky numerických výpočtů rychlosti a dráhy jsou v tabulce, grafy na obr. R3, R4.



Obr. R3



Obr. R4

4 body

Poznámka: V grafech jsou také vyznačeny časové průběhy rychlosti a dráhy vypočítané podle přesných vztahů získaných integrací pohybové rovnice:

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - Q_m t} - gt\,, \quad s = ut + u\left(t - \frac{m_0}{Q_m}\right) \ln \frac{m_0}{m_0 - Q_m t} - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Podle nich vychází $v_{60} = 226{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $s_{60} = 5701$ m. K přesným hodnotám se přiblížíme i naší numerickou metodou, zmenšíme-li časový krok Δt. Pro $\Delta t = 1$ s dostaneme $v_{60} = 225{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $s_{60} = 5651$ m. Pro $\Delta t = 0{,}1$ s se výsledky přibližného výpočtu s přesnými hodnotami prakticky shodují.

4. Uvažujme neinerciální vztažnou soustavu pevně spojenou s vagónem. V mezní situaci, tj. roura je v rovnovážné poloze vratké, protíná výslednice $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačné síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ osu otáčení. Síly mají působiště v těžišti roury.

a) Při brzdění na přímé trati v mezní situaci platí

$$\frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{ma}{mg} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3}\,,$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{g}{3} = 3{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

3 body

b) Při rovnoměrné jízdě v zatáčce se uplatní setrvačná síla odstředivá. V mezní situaci platí

$$\frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{ma_\mathrm{d}}{mg} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3}\,,$$

kde v je velikost rychlosti vlaku a a_d je velikost dostředivého zrychlení vagonu vzhledem k inerciální soustavě spojené se Zemí. Z rovnice plyne

$$v = \sqrt{\frac{rg}{3}} = 30{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Při brzdění v zatáčce je výsledná setrvačná síla vektorovým součtem tečné setrvačné síly a odstředivé setrvačné síly, které jsou k sobě kolmé. Platí

$$\frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{\sqrt{((ma_\mathrm{t})^2 + ma_\mathrm{d})^2}}{mg} = \frac{\sqrt{a_\mathrm{t}^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}}{g} = 0{,}26\,.$$

Protože $\frac{F_\mathrm{s}}{F_G} < \frac{1}{3}$, roura se nepřevrátí.

4 body

5. a) Označme h_T počáteční výšku těžiště krychle nad vodorovnou rovinou a r poloměr otáčení těžiště kolem hrany krychle. Pak práce nutná k jednomu překlopení krychle je

$$W_0 = mg(r - h_T) = mg\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\,.$$

Při přemístění do vzdálenosti d musíme krychli překlopit N krát, kde $N = d/a$. Celková práce nutná k přemístění bloku překlápěním je

$$W = NW_0 = mgd\frac{\sqrt{2}-1}{2} = 3\,400\ \mathrm{J}\,.$$

4 body

b) Z rovnosti vykonané práce W a potenciální energie krychle ve výšce h plyne

$$h = \frac{W}{mg} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}d = 2{,}5\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

c) Práce nutná k přemístění bloku posunutím je $W_1 = fmgd$. Z nerovnosti $W_1 < W$ plyne

$$f < \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}21\,.$$

4 body

7. a) Tloušťka plechu je mnohem menší než ostatní rozměry bóje. V takovém případě můžeme objem plechu dostatečně přesně určit ze vztahu

$$V = (2\pi r^2 + 2\pi r h)d = 2\pi r(r+h)d\,.$$

Tíha válce je

$$G = V\varrho_1 g = 2\pi r(r+h)d\varrho_1 g\,.$$

Tíha vody stejného objemu jako objem válce je

$$G_0 = \pi r^2 h\varrho_0 g\,.$$

Z podílu $\dfrac{G}{G_0} = \dfrac{2(r+h)d\varrho_1}{rh\varrho_0} = 0{,}16 < 1$ plyne, že bóje bude plavat.

4 body

b) Platí

$$2\pi r(r+h)d_1\varrho_1 g = \pi r^2 \frac{h}{2}\varrho_0 g\,,$$

z čehož

$$d_1 = \frac{rh\varrho_0}{4(r+h)\varrho_1} = 4{,}6\ \mathrm{mm}\,.$$

4 body

c) Jelikož užitím hliníkového plechu bude hmotnost bóje menší než hmotnost ocelové bóje, tím spíše bude plavat.
Z výsledku b) plyne pro tloušťku plechu

$$d_2 = \frac{rh\varrho_0}{4(r+h)\varrho_2} = 13{,}2\ \mathrm{mm}\,.$$

2 body

Autoři úloh: J. Hradecká (5), J. Jírů(2, 3, 4,), P. Šedivý (6) a I. Volf (1, 7)