ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie C

1. a) Je-li soustava v rovnováze, musí být výsledný moment vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení nulový. Osu otáčení zvolíme v místě podpěry. Síla, kterou působí chlapec na lano, je stejně velká jako síla, kterou působí lano na těleso o hmotnosti m_2 . Velikost této síly označíme F. Z podmínky rovnováhy

$$d_3m_3g + d_4m_4g + Fd_2 = m_1d_1g + m_2d_2g + Fd_4$$

odvodíme:

$$F = g\frac{m_3d_3 + m_4d_4 - m_1d_1 - m_2d_2}{d_4 - d_2} = g\frac{m_3 + 7m_4 - 5m_1 - 3m_2}{4} = 370\ \mathrm{N}\,.$$

Velikost síly, kterou působí chlapec na lano, je asi 370 N. **3 body**

b) Minimální hmotnost má chlapec, který za lano netáhne vůbec, tedy $F_{\min} = 0$. Z podmínky rovnováhy určíme hmotnost chlapce:

$$d_3m_3g + d_4m_{4\min}g = d_1m_1g + d_2m_2g\,,$$

$$m_{4\min} = \frac{m_1d_1 + m_2d_2 - m_3d_3}{d_4} = \frac{5m_1 + 3m_2 - m_3}{7} = 29\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

Maximální síla, kterou může chlapec působit, má velikost $F_{\max} = m_2g$. Potom těleso o hmotnosti m_2 na kládu nepůsobí. Vyjádříme opět podmínku pro rovnovážný stav:

$$d_1m_1g = d_3m_3g + d_4m_{4\max}g - d_4m_2g\,,$$

$$m_{4\max} = \frac{m_1d_1 - m_3d_3 + m_2d_4}{d_4} = \frac{5m_1 - m_3 + 7m_2}{7} = 51\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

Velikost síly, kterou chlapec působí na lano, je ve druhém případě $F_{\max} = m_2g = 390\ \mathrm{N}$; velikost síly může tedy být z intervalu $\langle 0\ \mathrm{N}, 390\ \mathrm{N}\rangle$. **1 bod**

Hmotnost chlapce může ležet v intervalu $\langle 29\ \mathrm{kg}, 51\ \mathrm{kg}\rangle$**, tomu odpovídá interval sil** $\langle 0\ \mathrm{N}, 390\ \mathrm{N}\rangle$**.**

2. a) Na konci děje je v nádobě voda o teplotě $t_3 < t_1$, voda z první nádoby odevzdala teplo

$$Q_1 = m_1 c(t_1 - t_3)\,.$$

Ve druhé nádobě bude voda o teplotě $t_4 > t_2$, voda přijala teplo

$$Q_2 = m_2 c(t_4 - t_2)\,.$$

Obě nádoby jsou tepelně izolované, tedy platí: $Q_1 = Q_2$. Porovnáním obou tepel určíme teplotu t_4:

$$t_4 = t_2 + \frac{m_1}{m_2}(t_1 - t_3) = 25\ °\mathrm{C}\,.$$

5 bodů

b) Hmotnost přelévané vody označíme m. Pro přelití tohoto množství vody z první nádoby do druhé platí:

$$m(t_1 - t_4) = m_2(t_4 - t_2)\,.$$

Po dosazení za t_4 určíme hmotnost m:

$$m = m_1 m_2 \frac{t_1 - t_3}{m_2(t_1 - t_2) - m_1(t_1 - t_3)} = 0{,}14\ \mathrm{kg}\,.$$

5 bodů

Teplota vody ve druhé nádobě bude po ukončení děje 25 °C**, hmotnost přelévané vody je** 0,14 kg**.**

3. a) Ze stavové rovnice plyne, že absolutní teplota je přímo úměrná součinu pV. Teplota ve stavu zobrazeném bodem B je tedy $T_B = T_{\max}$, teplota ve stavu zobrazeném bodem D je $T_D = T_{\min}$.

Bod A: $p_A = p_1$, $V_A = V_1$, $T_A = \dfrac{p_1 V_1}{n R_\mathrm{m}} = 361\ \mathrm{K}$.

Bod B: $p_B = p_1$, $T_B = T_{\max}$, $V_B = V_A \dfrac{T_{\max}}{T_A} = 3{,}33 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$.

Bod D: $T_D = T_{\min}$, $V_D = V_1$, $p_D = p_1 \dfrac{T_{\min}}{T_A} = 1{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$.

Bod C: $p_C = p_D$, $V_C = V_B$, $\dfrac{T_C}{T_{\min}} = \dfrac{T_{\max}}{T_A}$, $T_C = \dfrac{T_{\min} T_{\max}}{T_A} = 499\ \mathrm{K}$.

Upřesněný diagram p, V je na obr. R1a. **2 body**

b) Obr. R1b, R1c. **2 body**

c) Celková práce vykonaná plynem při kruhovém ději je dána obsahem plochy p, V diagramu: $W' = (p_A - p_D)(V_B - V_A)$. Po dosazení z části a) a úpravě obdržíme pro práci vztah:

$$W' = p_1 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_A}\right) V_1 \left(\frac{T_{\max}}{T_A} - 1\right) = 335 \text{ J} .$$

2 body

d) Ke stanovení termodynamické účinnosti musíme určit teplo přijaté plynem během kruhového děje. Plyn teplo přijímá při dějích AB a DA:

$$Q = Q_{AB} + Q_{DA} = nCp(T_{\max} - T_A) + nC_V(T_A - T_{\min}) ,$$

$$Q = nR_{\mathrm{m}} \left[\frac{5}{2}(T_A - T_{\min}) + \frac{7}{2}(T_{\max} - T_A)\right] = 8220 \text{ J} .$$

2 body

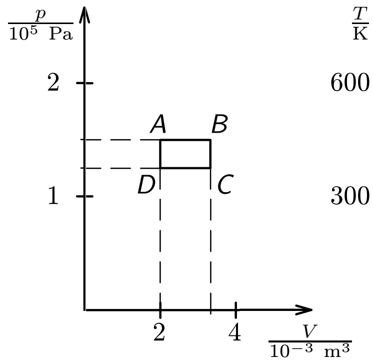
Pro účinnost platí: $\eta = \dfrac{W'}{Q} = 0{,}041 = 4{,}1\%$. **1 bod**

e) Účinnost Carnotova cyklu je dána vztahem:

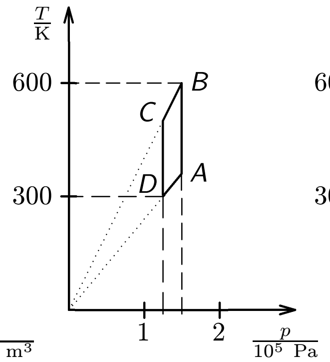
$$\eta_{\mathrm{c}} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 0{,}5 = 50\% .$$

1 bod

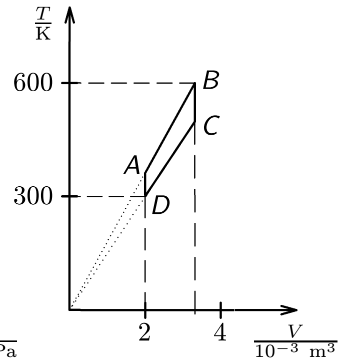
Práce vykonaná během kruhového děje je 335 J, účinnost zařízení je asi 4,1%, což je mnohem méně než účinnost Carnotova cyklu při stejné maximální a minimální teplotě. Účinnost Carnotova cyklu je 50% .



Obr. R1a



Obr. R1b



Obr. R1c

4. Objem kapaliny, která vystoupí vlivem kapilární elevace o délku x nad původní výšku, musí být stejně velký jako objem ponořené části přepážky. Z obr. 3 v zadání plyne:

$$\frac{ab2h}{3} = adx\,, \quad \text{odsud} \quad b = \frac{3dx}{2h}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

Musíme určit výšku kapilární elevace x. Povrchová síla, která elevaci vyvolá, je dána vztahem $F_p = 2\sigma a$.
(*Sílu, která působí na kratších stranách o délce d, zanedbáme.*)
Tíha kapaliny o výšce x je $G = adx\varrho g$. Platí:

$$F_p = G\,, \quad \text{odsud} \quad x = \frac{2\sigma}{\varrho g d}\,. \qquad \textbf{3 body}$$

Kapalina ovšem při elevaci nemůže vystoupit nad okraj nádoby. Proto

$$x < \frac{h}{3}, \qquad d > \frac{6\sigma}{\varrho g h} = 7{,}5\cdot 10^{-4}\ \text{m}\,. \qquad \textbf{2 body}$$

Dosadíme do vztahu pro b:

$$b = \frac{3\sigma}{\varrho g h} = 3{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{m}\,. \qquad \textbf{3 body}$$

Aby kapalina v široké části zůstala ve stejné výšce, musí mít přepážka tloušťku 0,38 mm **a její vzdálenost od stěny musí být větší než** 0,75 mm**.**

5. c) Pohyb válce můžeme v inerciální vztažné soustavě spojené s válcovou plochou popsat jako složený z posuvného pohybu osy válce a z otáčivého pohybu okolo této osy. Na válec působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce válcové plochy $\boldsymbol{F}$. Obě síly rozložíme do směrů tečny a normály k válcové ploše (obr. R2). Složky ve směru tečny určují tečné zrychlení osy válce $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ a složky ve směru normály určují zrychlení normálové $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$. Úhlové zrychlení válce určuje tečná složka reakce, což je síla smykového tření $\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_t$. Platí pohybové rovnice:

$$ma_\mathrm{t} = F_1 - F_3\,, \quad ma_\mathrm{n} = \frac{mv^2}{R-r} = F_4 - F_2\,, \quad F_3 r = J\varepsilon\,,$$

kde $J = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válce, v je velikost okamžité rychlosti jeho osy. Nedochází-li ke smyku, platí

$$v = \omega r\,, \qquad a_\mathrm{t} = \varepsilon r\,,$$

kde ω a ε jsou úhlová rychlost a úhlové zrychlení válce. Z pohybových rovnic odvodíme:

$$F_3 = J\frac{\varepsilon}{r} = \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{a_\mathrm{t}}{r^2} = \frac{ma_\mathrm{t}}{2}\,,$$

$$F_1 = mg\sin\alpha = F_3 + ma_\mathrm{t} = 3F_3\,, \qquad F_3 = F_t = \frac{mg\sin\alpha}{3}\,.$$

3 body

Ze zákona zachování energie plyne:

$$mg(R-r)(1-\cos\alpha_\mathrm{m}) = mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 =$$

$$= mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{3}{4}mv^2\,,$$

$$\frac{mv^2}{R-r} = \frac{4}{3}mg(\cos\alpha-\cos\alpha_\mathrm{m})\,, \quad F_4 = F_2 + ma_\mathrm{n} = \frac{7}{3}mg\cos\alpha - \frac{4}{3}mg\cos\alpha_\mathrm{m}\,,$$

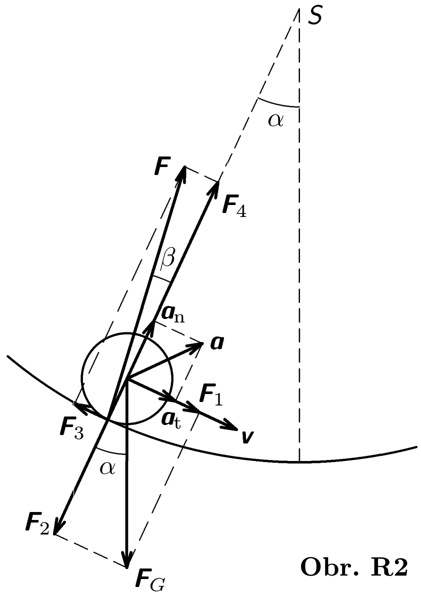
$$v = 2\sqrt{\frac{g(\cos\alpha-\cos\alpha_\mathrm{m})(R-r)}{3}}\,.$$

Podle principu akce a reakce působí válec na válcovou plochu silou $-\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = \sqrt{F_3^2 + F_4^2}$, která svírá s normálou válcové plochy úhel $\beta = \mathrm{arctg}(F_3/F_4)$.

Pro dané hodnoty:
$v = 1{,}35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $F_3 = 0{,}42\ \mathrm{N}$,
$F_4 = 5{,}70\ \mathrm{N}, \mathrm{F} = 5{,}71\ \mathrm{N}$,
$\beta = 4{,}2°$.

V poloze určené úhlem $\alpha = 15°$ se osa válce pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Válec působí na válcovou plochu silou o velikosti $5{,}71$ N, která svírá s normálou úhel $4{,}2°$.

3 body



Obr. R2

b) V rovnovážné poloze platí: $\alpha = 0\,,\qquad F_3 = 0\,,\qquad \beta = 0\,,$

$$v = 2\sqrt{\frac{g(1-\cos\alpha_\mathrm{m})(R-r)}{3}}\,,\qquad F = F_4 = \frac{7}{3}mg - \frac{4}{3}mg\cos\alpha_\mathrm{m}\,.$$

Pro dané hodnoty: $v = 1{,}50\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $F = 6{,}1\ \mathrm{N}$.

Rychlost osy válce při průchodu rovnovážnou polohou má velikost $1{,}50\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ **a válec zde působí na válcovou plochu svislou silou o velikosti** $6{,}1\ \mathrm{N}$**.**

2 body

a) Aby nedošlo ke smyku válce po válcové ploše, musí během celého pohybu platit $F_t = F_3 \leq f\cdot F_4$. V počáteční poloze je F_3 největší a F_4 nejmenší. Postačující podmínkou, aby nedošlo ke smyku je tedy

$$\frac{mg\sin\alpha_\mathrm{m}}{3} \leq f\cdot mg\cos\alpha_\mathrm{m}\,,\qquad \mathrm{tg}\,\alpha_\mathrm{m} \leq 3f\,.$$

Pro dané hodnoty: $\mathrm{tg}\,35° = 0{,}700 < 3\cdot 0{,}35 = 1{,}05\,.$

Podmínka, aby nedošlo ke smyku válce, je pro dané hodnoty splněna.

2 body

7. a) Po dobu vysouvání papíru zpod válečku působí na váleček tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce papíru $\boldsymbol{R}$, jejíž svislá složka $\boldsymbol{R}_2$ ruší účinek tíhové síly a vodorovná složka $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{F}_t$ je smykové tření, které vyvolá pohyb válečku (obr.R3a). V inerciální vztažné soustavě spojené se stolem popíšeme tento pohyb jako složený z posuvného rovnoměrně zrychleného pohybu hmotného středu válečku ve směru pohybu papíru a z rovnoměrně zrychleného otáčivého pohybu válečku okolo jeho osy. Platí pohybové rovnice

$$F_t = ma_1\,,\qquad F_t r = J\varepsilon_1\,,$$

kde a_1 je velikost zrychlení hmotného středu válečku, ε_1 je velikost úhlového zrychlení válečku a $J = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válečku. Jestliže nenastane smyk, platí

$$a - a_1 = r\varepsilon_1\,.$$

Řešením pohybových rovnic dojdeme ke vztahům:

$$a_1 = \frac{a}{3}\,,\qquad \varepsilon_1 = \frac{2a}{3r}\,,\qquad F_t = \frac{1}{3}ma\,.$$

Aby nenastal smyk válečku po papíru, musí platit

$$F_t \leq f_1 mg\,.\qquad \text{Z toho}\quad a \leq 3f_1 g\,.$$

Pro dané hodnoty: $a_1 = 1,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\varepsilon = 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$, $a \leq 8{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ke smyku válečku po papíru nedojde. Hmotný střed válečku se během vysouvání papíru pohybuje vzhledem k desce stolu rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti $1{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$**.**

4 body

b) Váleček během doby t_1 vysouvání papíru získá úhlovou rychlost o velikosti ω_1, jeho hmotný střed se posune do vzdálenosti s_1 a získá rychlost o velikosti v_1. Platí:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{2} + s_1 &= \frac{1}{2}at_1^2 \\ s_1 &= \frac{1}{2}a_1t_1^2 \end{aligned}\right\} \frac{\frac{l}{2}+s_1}{s_1} = \frac{a}{a_1} = 3\,, \quad s_1 = \frac{l}{4}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{3l}{2a}}\,, \qquad \omega_1 = \varepsilon_1 t_1 = \frac{2a}{3r}\sqrt{\frac{3l}{2a}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2la}{3}}\,,$$

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{3l}{2a}} = \sqrt{\frac{al}{6}}\,.$$

Pro dané hodnoty:

$s_1 = 7{,}0 \text{ cm}$, $t_1 = 0{,}37 \text{ s}$, $\omega_1 = 37 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_1 = 0{,}37 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

V okamžiku vysunutí papíru zpod válečku bude jeho hmotný střed vzdálen od počáteční polohy o 7 cm **a jeho rychlost bude mít velikost** $0{,}37 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$**.**

Úhlová rychlost válečku bude mít velikost $37 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$**.** **3 body**

c) Po vysunutí papíru zpod válečku působí na váleček tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce papíru $\boldsymbol{R}'$, jejíž svislá složka $\boldsymbol{R}'_2$ ruší účinek tíhové síly a vodorovná složka $\boldsymbol{R}'_1 = \boldsymbol{F}'_t$ je smykové tření, které brzdí pohyb válečku (obr. R3b). V inerciální vztažné soustavě spojené se stolem popíšeme pohyb válečku jako složený z posuvného rovnoměrně zpomaleného pohybu hmotného středu válečku a z rovnoměrně zpomaleného otáčivého pohybu válečku okolo jeho osy. Platí pohybové rovnice

$$F'_t = ma_2\,, \qquad F'_t r = J\varepsilon_2\,.$$

Valeček klouže po stole a smykové tření má velikost $F'_t = mgf_2$. Řešením pohybových rovnic dostaneme pro velikost a_2 zrychlení hmotného středu a pro velikost ε_2 úhlového zrychlení:

$$a_2 = \frac{F'_t}{m} = gf_2\,, \qquad \varepsilon_2 = \frac{F'_t r}{J} = \frac{2gf_2}{r}\,.$$

Obě složky pohybu ustanou současně, neboť jejich brzdné doby jsou stejné:

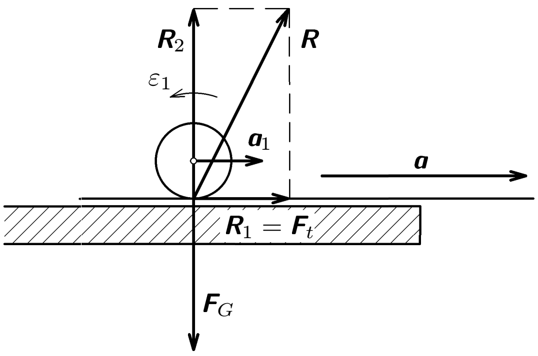
$$t_b = \frac{\omega_1}{\varepsilon_2} = \frac{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2la}{3}}}{\frac{2gf_2}{r}} = \frac{\sqrt{\frac{al}{6}}}{gf_2} = \frac{v_1}{a_2}\,.$$

Hmotný středválečku se po vysunutí papíru posune do vzdálenosti

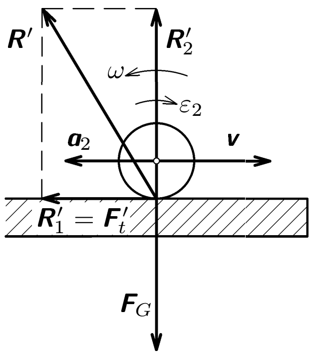
$$s_2 = \frac{v_1 t_b}{2} = \frac{v_1^2}{2a_2} = l \cdot \frac{a}{12gf_2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $a_2 = 3{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\varepsilon_2 = 390\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, $s_2 = 0{,}018\ \mathrm{m} =$ 1,8 cm.

Po vysunutí papíru se váleček setrvačností sklouzne ještě do vzdálenosti 1,8 cm **a zastaví se.** **3 body**



Obr. R3a



Obr. R3b

Autorka úloh: R. Horáková