Řešení úloh regionálního kola 38. ročníku FO, kat. B

Autoři úloh: M. Randa (1), V. Vícha (2, 3), R. Baník (4)

1. úloha Před přiložením otevřeného konce zatavené kapiláry k hladině se v kapiláře nachází vzduch o objemu $V_0 = \pi r^2 l$ a tlaku p_{a}. Po ponoření se objem zmenší na $V = \pi r^2 (l - x)$ a tlak vzroste na hodnotu p. Platí Boylův-Mariottův zákon:

$$p_{\mathrm{a}} V_0 = pV\,, \qquad p = \frac{V_0}{V}\, p_{\mathrm{a}} = \frac{l}{l - x}\, p_{\mathrm{a}}\,. \tag{1}$$

2 body

Tlak v uzavřeném prostoru je roven součtu atmosférického tlaku a kapilárního tlaku zmenšenému o hydrostatický tlak sloupce kapaliny:

$$p = p_{\mathrm{a}} + \frac{2\sigma}{r} - x\varrho g\,. \tag{2}$$

2 body

Z kapilární elevace v otevřené kapiláře určíme

$$\sigma \cdot 2\pi r = \pi r^2 h\varrho g\,, \qquad \frac{2\sigma}{r} = h\varrho g. \tag{3}$$

2 body

Spojením vztahů (1), (2), (3) dostaneme:

$$p_{\mathrm{a}} \frac{l}{l - x} = p_{\mathrm{a}} + h\varrho g - x\varrho g\,, \qquad x^2 \varrho g - x(p_{\mathrm{a}} + h\varrho g + l\varrho g) + hl\varrho g = 0\,,$$

2 body

Numerickým řešením této kvadratické rovnice dostaneme kořeny

$$x_1 = 11{,}24\ \mathrm{m}, \quad x_2 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Úloze vyhovuje druhý kořen. V zatavené kapiláře vystoupí voda jen do výše 2,6 mm. **2 body**

2. úloha

a) Na desce a válci vzniknou po připojení zdroje náboje $+Q_1$, $-Q_1$, jejichž velikost je určena napětím zdroje a počáteční kapacitou kondenzátoru. Protože zdroj odpojíme, náboje se během pohybu desky nemění. Platí:

$$Q_1 = U_1 C_1 = \frac{U_1 \varepsilon_0 S}{h} = \frac{U_1 \varepsilon_0 \pi d^2}{h}\,.$$

Během pohybu desky se kapacita kondenzátoru zvětšuje. Jeho elektrická energie, kterou určíme ze vztahu

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{Q_1^2}{2C} = \frac{\dfrac{U_1^2 \varepsilon_0^2 S^2}{2h^2}}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2}\, x\,,$$

je přímo úměrná vzdálenosti x desek a během pohybu se zmenšuje. Působením elektrické přitažlivé síly F_{el} deska získává kinetickou energii, která je rovna úbytku elektrické energie kondenzátoru. Platí:

$$F_{\mathrm{el}}(-\Delta x) = -\Delta E_{\mathrm{el}} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2}(-\Delta x)\,, \qquad F\mathrm{el} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8h^2} = konst.$$

4 body

b) V beztížném stavu na desku působí jen elektrická síla, která ji uvede do rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením

$$a = \frac{F_{\mathrm{el}}}{m} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2}\,.$$

Z toho určíme dobu pohybu t:

$$h = \frac{1}{2}at^2\,, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \frac{4h}{U_1 d}\sqrt{\frac{hm}{\pi\varepsilon_0}}\,.$$

Po dosazení: $t = 21{,}5$ s ($F_{\mathrm{el}} = 8{,}7 \cdot 10^{-5}$ N, $a = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ m·s^{-2}). **3 body**

c) V tíhovém poli Země působí na desku tíhová síla, která je mnohem větší než síla elektrická. Platí:

$$a = \frac{F_G + F_{\mathrm{el}}}{m} = g + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2}\,.$$

Z toho určíme rychlost dopadu:

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}\,, \qquad v = \sqrt{2ha} = \sqrt{2h\left(g + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2}\right)}\,.$$

Při nenabitém kondenzátoru $a = g$, $v' = \sqrt{2hg} \doteq 1{,}401$ m·s^{-1}. Poměr obou rychlostí je

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{1 + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mgh^2}} = 1{,}0000221\,.$$

Rychlosti se liší o $0{,}0000221 v' \doteq 3{,}1 \cdot 10^{-5}$ m·s^{-1}, tedy zcela nepatrně. **3 body**

3. úloha

a) Barycentrum rozděluje spojnici středů Země a Měsíce v převráceném poměru jejich hmotností:

$$\frac{x}{r-x} = \frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}}\,, \qquad x = \frac{rM_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M}} = 4\,667\ \mathrm{km}\,.$$

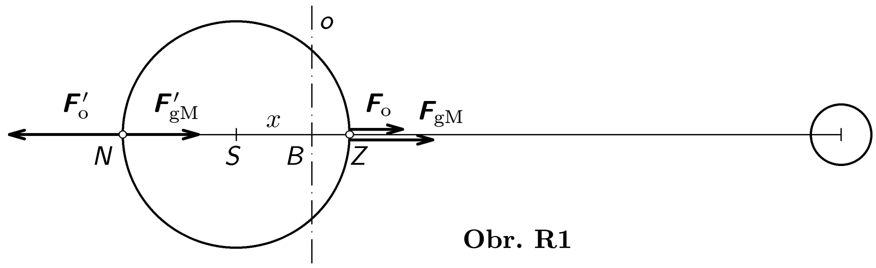
2 body

b) Dostředivá síla, která nutí Zemi obíhat okolo barycentra, je gravitační síla Měsíce. Platí:

$$M_\mathrm{Z}\frac{4\pi^2 x}{T^2} = \varkappa\frac{M_\mathrm{Z}M_\mathrm{M}}{r^2}\,, \qquad T = 2\pi r\sqrt{\frac{x}{\varkappa M_\mathrm{M}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\varkappa(M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M})}}\,.$$

Po dosazení: $T = 27\mathrm{d}\ 6\mathrm{h}\ 38\ \mathrm{min}\,.$ **3 body**

c)



Obr. R1

V bodě Z:
$$F_{gM} = \varkappa\frac{mM_\mathrm{M}}{(r-R_\mathrm{Z})^2} = 3{,}4\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$
$$F_\mathrm{o} = \frac{4\pi^2 m(R_\mathrm{Z}-x)}{T^2} = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$
$\Big\}$ $F_\mathrm{v} = 4{,}6\cdot 10^{-5}$ N od středu Země

V bodě N:
$$F'_{gM} = \varkappa\frac{mM_\mathrm{M}}{(r+R_\mathrm{Z})^2} = 3{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$
$$F'_\mathrm{o} = \frac{4\pi^2 m(R_\mathrm{Z}+x)}{T^2} = 7{,}8\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$
$\Big\}$ $F'_\mathrm{v} = 4{,}6\cdot 10^{-5}$ N od středu Země

2 body

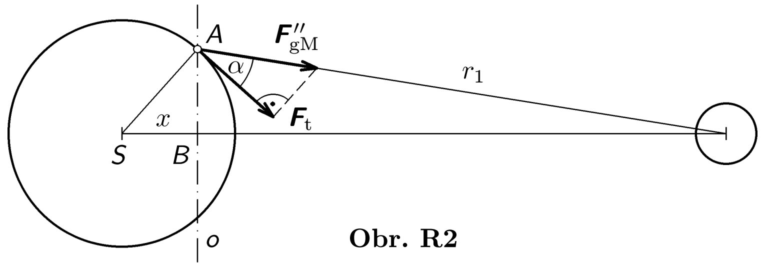
d) V místech, kde osa o protíná povrch Země, bude $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ nulová. Stačí tedy určit tečnou složku složku gravitační síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{gM}$. Podle obr. R2:

$$|AB| = \sqrt{R_\mathrm{Z}^2 - x^2}\,, \quad r_1 = \sqrt{(r-x)^2 + |AB|^2} = \sqrt{r^2 - 2rx + R_\mathrm{Z}^2} = 3{,}798\cdot 10^8\ \mathrm{m}\,,$$

$$r^2 = R_\mathrm{Z}^2 + r_1^2 - 2R_\mathrm{Z}r_1\cos(90^\circ+\alpha)\,, \qquad \sin\alpha = \frac{r^2 - R_\mathrm{Z}^2 - r_1^2}{2R_\mathrm{Z}r_1}\,,$$

$$F_\mathrm{t} = F''_\mathrm{gM} \cos\alpha = \varkappa \frac{mM_\mathrm{M}}{r_1^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 - R_\mathrm{Z}^2 - r_1^2}{2R_\mathrm{Z} r_1}\right)^2} = 2{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}\,.$$

3 body



Obr. R2

4. úloha

a) V roztoku kyseliny sírové dochází k disociaci $H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}$. Kationty H^+ vytvářejí s molekulami vody *oxoniové ionty* H_3O^+ a putují k záporné katodě kde se neutralizují za vzniku vodíku. Anionty SO_4^{2-} putují ke kladné anodě, kde odevzdávají elektrony a reagují s vodou za vzniku kyslíku.
2 body

b) Při vyloučení molekuly kyslíku O_2 se na anodě uvolní 4 elektrony. Stejně velký náboj stačí na katodě ke vzniku dvou molekul vodíku H_2. Proto objem plynu v trubici u katody roste rychleji než v trubici u anody. Počet N molekul plynu ve zcela zaplněné trubici určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{NR_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}}\,, \qquad N = \frac{N_\mathrm{A} pV}{R_\mathrm{m} T} = \frac{N_\mathrm{A} LS\left(p_\mathrm{a} + \frac{L}{2}\varrho g\right)}{R_\mathrm{m} T}\,.$$

Po dosazení: $N = 1{,}096 \cdot 10^{23}$.

($T = 293{,}15$ K, $p = 1{,}109 \cdot 10^5$ Pa, $V = 4{,}0 \cdot 10^{-3\ \mathrm{m}^3}$.) K vyloučení takového počtu molekul vodíku potřebujeme náboj

$$Q_1 = 2Ne = I\tau_1\,. \quad \text{Z toho:} \quad \tau_1 = \frac{Q_1}{I} = \frac{2Ne}{I}\,.$$

Po dosazení: $Q_1 = 3{,}51 \cdot 10^4$ C, $\tau_1 = 7{,}02 \cdot 10^4$ s $= 19{,}5$ h.
K vyloučení stejného počtu molekul kyslíku potřebujeme dvojnásobný náboj. Proto $\tau_2 = 2\tau_1 = 7{,}02 \cdot 10^4$ s $= 39$ h. Toto je také doba, za kterou budou zapněny plynem obě trubice. **5 bodů**

c) Abychom získali N molekul kyslíku, musíme rozložit $2N$ molekul vody o relativní molekulové hmotnosti $M_\mathrm{r} = 18{,}016$. Celková hmotnost rozložené vody je $m = 2NM_\mathrm{r} m_\mathrm{u} = 6{,}55 \cdot 10^{-3}$ kg. **2 body**