ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie B

1.a) Otočením rotoru o 180° se objem plynu zvětší z V_1 na $V_2 = V_1 + V_\mathrm{s}$. Tlak plynu klesne na p_2 a absolutní teplota na T_2. Z Poissonova zákona a stavové rovnice odvodíme:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{\varkappa} = 9{,}86 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,,$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{\varkappa - 1} = 293{,}98\ \mathrm{K}\,, \quad t_2 = 20{,}8\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body

b) Pokud by platil předpoklad o adiabatickém rozpínání, dostali bychom při dalších půlotáčkách rotoru vývěvy posloupnost tlaků $\{p_i\}$:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{\varkappa} = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{2\varkappa} \ldots\ p_i = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{(i-1)\varkappa}\,.$$

Odtud vyjádříme i jako funkci tlaku p_i:

$$\ln \frac{p_i}{p_1} = (i-1)\varkappa \cdot \ln \frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\,, \qquad i = 1 + \frac{\ln \dfrac{p_i}{p_1}}{\varkappa \cdot \ln \dfrac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}}\,.$$

Pokles tlaku pod p_k nastane pro $i > 711{,}9$. Tomu odpovídá $N_1 = 356$ otáček rotoru vývěvy. Na konci čerpání by v nádobě byla teplota

$$T_\mathrm{k} = T_1 \left(\frac{p_\mathrm{k}}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = 17{,}4\ \mathrm{K}\,.$$

3 body

c) Má-li tlak v nádobě zůstat pod hodnotou p_k i po vyrovnání teploty na t_1, musí se látkové množství plynu zmenšit z počáteční hodnoty n_1 na hodnotu menší než

$$n_\mathrm{k} = n_1 \frac{p_\mathrm{k}}{p_1}\,.$$

Po jednotivých půlotáčkách rotoru dostáváme posloupnost látkových množství $\{n_i\}$:

$$n_3 = n_2 \frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}} = n_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^2 \ldots\ n_i = n_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\right)^{(i-1)}\,.$$

Odtud vyjádříme i jako funkci látkového množství n_i:

$$\ln \frac{n_i}{n_1} = (i-1) \ln \frac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}\,, \qquad i = 1 + \frac{\ln \dfrac{n_i}{n_1}}{\ln \dfrac{V_1}{V_1 + V_\mathrm{s}}}\,.$$

Pokles tlaku pod p_k nastane pro $i > 996{,}3$. Tomu odpovídá $N_2 = 499$ otáček rotoru vývěvy. **3 body**

d) Skutečný počet otáček rotoru potřebný k poklesu tlaku pod p_k bude větší, protože sání neprobíhá jako rovnovážný děj – v sacím prostoru bude menší tlak než v nádobě. Projeví se také netěsnosti šoupátek a válcového rotoru v místech dotyku se stěnami čerpací komory. **1 bod**

2. a) Pohyb desky až do dotyku s druhou deskou trvá po dobu

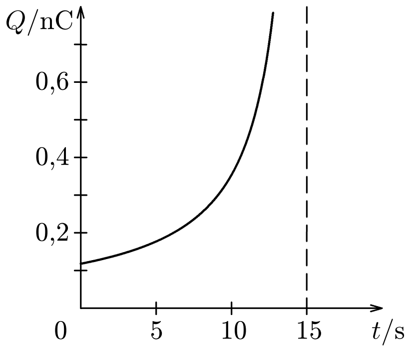
$$t_d = d/v = 15 \text{ s}.$$

V tomto časovém intervalu se náboj kondenzátoru zvětšuje podle vztahu

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt} = Q_0 \cdot \frac{d}{d - vt}, \quad (1)$$

kde $Q_0 = \dfrac{\varepsilon_0 SU}{d} = 0{,}118$ nC je počáteční náboj.

Obr. R1



Závislost náboje kondenzátoru na čase je vyjádřena lomenou funkcí a grafem je úsek hyperboly (obr. R1). **2 body**

b) V čase t' platí

$$Q' = \frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt'}, \qquad \text{z toho} \quad t' = \frac{dQ' - \varepsilon_0 SU}{Q'v} = 13{,}2 \text{ s}.$$

1 bod

c) Posloupnosti časů $\{t_i\}$ časů odečítaných po jedné desetině sekundy přísluší posloupnost $\{Q_i\}$ okamžitých nábojů na kondenzátoru. Průměrný proud v n-té desetině sekundy je

$$I_n = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\varepsilon_0 SUv}{(d - vt_n)(d - vt_{n-1})}$$

Po dosazení $I_{100} = 6{,}9 \cdot 10^{-11}$ A, $\quad I_{145} = 5{,}9 \cdot 10^{-9}$ A. **2 body**

d) Okamžitý nabíjecí proud v čase t je

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt}\right) = \frac{\varepsilon_0 SUv}{(d - vt)^2}$$

(Stejný výsledek dostaneme i v úloze c), pro velmi malý časový interval. Pak $t_n \doteq t_{n-1} \doteq t$.) **2 body**

e) Výsledná kapacita obou seriově spojených kondenzátorů je

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - vt}}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d} + \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - vt}} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d - vt} \,.$$

Je stejná jako kapacita jediného kondenzátoru, jehož desky by měly vzdálenost $2d - vt$. Analogicky k úloze b):

$$Q'' = \frac{\varepsilon_0 S U}{2d - vt''} \,, \qquad \text{z toho} \quad t'' = \frac{2dQ'' - \varepsilon_0 S U}{Q'' v} = 12{,}3 \text{ s} \,.$$

V čase t'' bude na pevném kondenzátoru napětí

$$U_1 = \frac{Q''}{C_1} = \frac{Q'' d}{\varepsilon_0 S} = 42{,}4 \text{ V}$$

a na pohyblivém kondenzátoru $U_2 = U - U_1 = 7{,}6$ V. **3 body**

3. a) Dobu kmitu T_1 kyvadla určíme ze vztahu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \,,$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a D je direkční moment moment kyvadla. Platí $D = mgd$, kde $d = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. Kyvadlo složeno ze tří tyčí délky a a hmotnosti $m/3$. Užitím Steinerovy věty dostaneme:

$$J = 3 \cdot \frac{1}{12} \frac{m}{3} a^2 + 2 \cdot \frac{m}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{2} \,.$$

Po dosazení

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\dfrac{ma^2}{2}}{mga\dfrac{\sqrt{3}}{3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}} \,.$$

4 body

Redukovanou délku $l^\star$ kyvadla určíme z rovnosti

$$2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^\star}{g}} \,. \qquad \text{Po úpravě} \quad l^\star = a\frac{\sqrt{3}}{2} \,.$$

Redukovaná délka $l^\star$ našeho kyvadla je rovna výšce trojúhelníka. **3 body**

b) Hmotný bod jsme umístili ve vzdálenosti od osy, která je rovna redukované délce kyvadla, doba kmitu se nezmění. Je to, jako by s původním kyvadlem současně kývalo matematické kyvadlo se stejnou dobou kmitu. Doba kmitu se přidáním hmotného bodu nezmění. Můžeme se o tom přesvědčit dosazením do obecného vztahu:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J + m\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{mga\frac{\sqrt{3}}{3} + mga\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5}{4}ma^2}{\frac{5}{6}mga\sqrt{3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}} = T_1\,.$$

3 body

4.a) Ke dnu komína dorazí všechny koule téměř současně rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gh}$. Pak začne série dokonale pružných rázů.

Po dokonale pružném přímém centrálním rázu dvou koulí o hmotnostech m_1 a m_2, jejichž rychlosti měly před rázem souřadnice v_1 a v_2, má druhá koule rychlost o souřadnici

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Při srážce první a druhé koule u dna komína platí:

$$m_2 = qm_1,\ v_1 = v,\ v_2 = -v.$$

Po srážce se druhá koule pohybuje vzhůru rychlostí

$$u_2 = \frac{2m_1v - (qm_1 - m_1)v}{m_1 + qm_1} = v\frac{3-q}{1+q} = v\left[\frac{2^2}{1+q} - 1\right]\,.$$

Při srážce druhé a třetí koule u dna komína platí:

$$m_3 = qm_2,\ v_2 = v\left[\frac{2^2}{1+q} - 1\right],\ v_3 = -v.$$

Po srážce se třetí koule pohybuje vzhůru rychlostí

$$u_3 = \frac{2m_2v\left[\frac{2^2}{1+q} - 1\right] - (qm_2 - m_2)v}{m_2 + qm_2} = v\left[\frac{2^3}{(1+q)^2} - 1\right]\,.$$

Matematickou indukcí dokažte, že poslední koule získá při odrazu od předposlední koule rychlost

$$u_n = v\left[\frac{2^n}{(1+q)^{n-1}} - 1\right] = \sqrt{2gh}\left[\frac{2^n}{(1+q)^{n-1}} - 1\right]\,.$$

5 bodů

b) Nerovnice

$$u_n = v\left[\frac{2^n}{(1+q)^{n-1}} - 1\right] = v\left[\left(\frac{2}{1+q}\right)^n (1+q) - 1\right] > c$$

má za podmínek $v > 0,\ q \in (0;1)$ řešení

$$\left(\frac{2}{1+q}\right)^n > \frac{\frac{c}{v}+1}{1+q}\,, \qquad n > \frac{\log\left(\frac{\frac{c}{\sqrt{2gh}}+1}{1+q}\right)}{\log\left(\frac{2}{1+q}\right)}\,.$$

Pro dané hodnoty $n > 4{,}69$, tedy $n = 5$. **3 body**

c) Celková mechanická energie soustavy pro $n = 5$ je

$$E_c = \frac{1}{2}v^2 \cdot \sum_{i=1}^{5} m_i = \frac{1}{2}m_1 v^2 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}\,.$$

Pátá koule získala energii

$$E_5 = \frac{1}{2}m_1 q^4 u_5^2 = \frac{1}{2}m_1 q^4 v^2 \left[\frac{2^5}{(1+q)^4} - 1\right]^2\,.$$

Energie poslední koule a celková mechanická energie jsou v poměru

$$\frac{E_5}{E_c} = \frac{q^4\left[\frac{2^5}{(1+q)^4} - 1\right]^2}{\frac{q^5-1}{q-1}} = 0{,}0391\,.$$

Poslední koule tedy získala asi 3,9 % z celkové mechanické energie soustavy.

2 body

5. Samotný tónový generátor si můžeme představit jako sériové spojení ideálního zdroje harmonického napětí o efektivní hodnotě U_0 a vnitřního odporu R_i. Odebíráme-li z generátoru proud I, klesne jeho svorkové napětí na

$$U = U_0 - R_i \cdot I\,. \qquad \text{Z toho} \quad R_i = \frac{U_0 - U}{I} = 3{,}0\ \mathrm{k\Omega}\,.$$

2 body

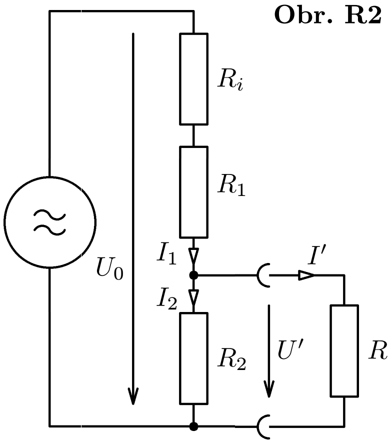
Tónový generátor s děličem napětí překreslíme podle obr. R2. Označme U' napětí na výstupních svorkách děliče, jestliže z nich odebíráme proud I'. Rezistorem o odporu R_2 přitom prochází proud I_2 a generátor dodává proud I_1. Platí:

$$I_2 = \frac{U'}{R_2}\,, \qquad I_1 = I' + I_2\,,$$

$$U' + I_1(R_1 + R_i) = U_0\,.$$

2 body

Obr. R2



Spojením těchto vztahů a úpravami dostaneme:

$$U' + \left(I' + \frac{U'}{R_2}\right)(R_1 + R_i) = U_0\,,$$

$$U' = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_i} - \frac{(R_1 + R_i)R_2}{R_1 + R_2 + R_i} \cdot I' = U_0' - R_i' I'\,. \qquad \textbf{3 body}$$

Podle zadání

$$U_0' = \frac{10\ \mathrm{V} \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 100\ \mathrm{mV}\,, \qquad R_i' = \frac{(R_1 + R_i)R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 75\ \Omega\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$R_2 = \frac{100}{99} R_i' = 75{,}8\ \Omega\,, \quad R_1 = 99R_2 - R_i = 99R_2 - 3{,}0\ \mathrm{k\Omega} = 4\,500\ \Omega\,.$$

3 body

7. Pod zakřiveným povrchem vody v kapiláře o průměru d se sníží tlak oproti tlaku atmosférickému o

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma\cos\vartheta}{d}\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Podtlak v užší části kapiláry je větší než v části širší. V rovnovážné poloze po nadzvednutí užší části kapiláry vyrovnáme rozdíl kapilárních tlaků hydrostatickým tlakem nakloněného sloupce vody:

$$p_{\mathrm{at}} - \frac{4\sigma\cos\vartheta}{d_1} + \varrho g h = p_{\mathrm{at}} - \frac{4\sigma\cos\vartheta}{d_2}\,, \quad h = \frac{4\sigma\cos\vartheta\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)}{g}\,.$$

2 body

Délka vodního sloupce bude největší, když téměř všechna voda bude v užší části trubice. V tomto případě bude sklon kapiláry minimální:

$$l_{\max} = \frac{4m}{\varrho \pi d_1^2} = \frac{h}{\sin \alpha_{\min}} ,$$

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{h \varrho \pi d_1^2}{4m} = \frac{\sigma \pi d_1^2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{\sigma \pi d_1 \cos \vartheta}{mg} \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right) .$$

2 body

Délka vodního sloupce bude nejmenší, když téměř všechna voda bude v širší části trubice. V tomto případě bude sklon kapiláry maximální:

$$l_{\min} = \frac{4m}{\varrho \pi d_2^2} = \frac{h}{\sin \alpha_{\max}} ,$$

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{h \varrho \pi d_2^2}{4m} = \frac{\sigma \pi d_2^2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{\sigma \pi d_2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) .$$

2 body

Diskuse:

Pro minimální úhel sklonu musí platit:

$$\sin \alpha_{\min} < 1 , \qquad m > \frac{\sigma \pi d_1 \cos \vartheta}{g} \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right) .$$

Je-li hmotnost kapky menší nebo rovna této hodnotě, bude všechna voda trvale v užší trubici. Pro maximální úhel sklonu musí platit:

$$\sin \alpha_{\max} \leq 1 , \qquad m \geq \frac{\sigma \pi d_2 \cos \vartheta}{g} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) .$$

Je-li hmotnost kapky menší, nevyteče voda ani ve svislé poloze. **2 body**

Pro dané hodnoty dostaneme: $\alpha_{\min} = 8{,}96°$ $\alpha_{\max} = 38{,}1°$. **1 bod**

Autoři úloh: V. Vícha (1,2), K. Rauner (4), Z. Polák (6), P. Šedivý (3,5,7)