Řešení úloh ústředního kola 38. ročníku FO

Autoři úloh: J. Erhart (1), P. Šedivý (2, 3, 4)

1. úloha

a) Označme dané veličiny: $V = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, $T_0 \doteq 273\ \mathrm{K}$, $T_1 \doteq 373\ \mathrm{K}$, $m = 0{,}018\ \mathrm{kg}$, $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$.
Objem vody je vzhledem k objemu nádoby zanedbatelný. Část vody se po uzavření nádoby odpaří a vytvoří nasycené páry, které budou mít při teplotě 0 °C nepatrný tlak 611 Pa (viz MFCh tabulky).
Po zahřátí na 100 °C stoupne tlak vzduchu v nádobě na

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} \doteq 1{,}37 p_0$$

a tlak nasycených vodních par právě na hodnotu p_0. V nádobě bude výsledný tlak

$$p = p_1 + p_0 \doteq 2{,}37 p_0 \,.$$ **4 body**

b) Hmotnost m' nasycených vodních par v nádobě určíme pomocí stavové rovnice, která platí dosti přesně i pro nasycené páry:

$$\frac{p_0 V}{T_1} = \frac{m'}{M_\mathrm{m}} R_\mathrm{m} \,, \qquad m' = \frac{M_\mathrm{m} p_0 V}{R_\mathrm{m} T_1} \,.$$ **4 body**

Po dosazení

$$m' = \frac{18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 0{,}0224\ \mathrm{m}^3}{8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \cdot 373\ \mathrm{K}} \doteq 0{,}013\ \mathrm{kg} \,.$$

Protože $m' < m$, všechna voda se neodpařila a páry jsou skutečně nasycené.
2 body

2. úloha

a) Vyjdeme z kinematických zákonů šikmého vrhu:

$$x = v_0 t \cos\varepsilon \,, \qquad y = H + v_0 t \sin\varepsilon - \frac{1}{2} g t^2 = H + x \operatorname{tg}\varepsilon - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

V bodě dopadu platí:

$$L = v_0 T \cos\varepsilon \,, \qquad H + L \operatorname{tg}\varepsilon - \frac{1}{2} g T^2 = 0 \,.$$

Z toho

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} g T^2 - H}{L} \,, \qquad v_0 = \frac{L}{T \cos\varepsilon} \,.$$

Numericky: $\operatorname{tg}\varepsilon = 5{,}2398$, $\varepsilon = 79{,}20^\circ$, $v_0 = 18{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **4 body**

b) Hledaný bod leží zřejmě blízko vrcholu trajektorie na její sestupné části, nebo je to bod B. Vzdálenost r kamene od bodu A závisí na čase podle vztahu

$$r^2 = (v_0 t \cos\varepsilon)^2 + \left(v_0 t \sin\varepsilon - \frac{gt^2}{2}\right)^2 = t^2\left(v_0^2 - v_0 g t \sin\varepsilon + \frac{g^2 t^2}{4}\right) .$$

Leží-li hledaný bod blízko vrcholu trajektorie, musí zde platit

$$\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = t(g^2 t^2 - 3 v_0 g t \sin\varepsilon + 2 v_0^2) = 0 ,$$

Rovnice má tři kořeny

$$t_0 = 0 , \qquad t_{1,2} = \frac{v_0\left(3\sin\varepsilon \mp \sqrt{9\sin^2\varepsilon - 8}\right)}{2g} ,$$

ovšem za předpokladu, že

$$\sin\varepsilon > \sqrt{\frac{8}{9}} , \qquad \varepsilon > 70{,}53^\circ , \quad \text{což je v našem případě splněno.}$$

Po dosazení dostáváme $t_1 = 2{,}0343$ s , $t_2 = 3{,}621$ s .
V čase t_1 dostaneme lokální maximum $r_1 = 18{,}75$ m, v čase t_2 lokální minimum $r_2 = 13{,}05$ m. Protože

$$|AB| = \sqrt{L^2 + H^2} = 18{,}03 \text{ m} ,$$

nachází se kámen v největší vzdálenosti od bodu A v čase t_1, kdy prolétá bodem X o souřadnicích $x = 7{,}18$ m , $y = 27{,}32$ m . **6 bodů**

Poznámka: Můžeme také vycházet ze skutečnosti, že v nejvzdálenějším bodě trajektorie jsou vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ navzájem kolmé:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = \left(v_0 t \cos\varepsilon ,\ v_0 t \sin\varepsilon - \frac{1}{2} g t^2\right) \cdot (v_0 \cos\varepsilon ,\ v_0 \sin\varepsilon - gt) = 0 ,$$

$$v_0^2 t - \frac{3 g t^2 v_0 \sin\varepsilon}{2} + \frac{g^2 t^3}{2} = 0 , \ \ldots \text{atd.}$$

3. úloha

a) Dráhový rozdíl paprsků vycházejících ze sousedních vrypů mřížky směrem k výstupní štěrbině určíme podle obr. R1. Musí být roven vlnové délce světla, pro které na výstupní štěrbině vznikne interferenční maximum prvního řádu:

$$\delta = s_2 - s_1 = b(\cos\varphi - \sin\varphi) = \lambda , \qquad \textbf{2 body}$$

kde $b = \dfrac{1\ \mathrm{mm}}{850}$ je perioda (mřížková konstanta) mřížky. Výraz upravíme:

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sin(\varphi + 90°) - \sin\varphi = 2\sin 45° \cos(\varphi + 45°) = \sqrt{2}\cos(\varphi + 45°)\,,$$

$$\delta = b\sqrt{2}\cos(\varphi + 45°) = \lambda\,, \qquad \varphi = \arccos\frac{\lambda}{b\sqrt{2}} - 45°\,. \tag{1}$$

3 body

Pro vlnovou délku $\lambda_1 = 420$ nm dostáváme $\varphi_1 = 30{,}38°$; pro vlnovou délku $\lambda_2 = 750$ nm dostáváme $\varphi_2 = 18{,}21°$. **1 bod**

b) Průmět úsečky *SA* do směru osy mikrometrického šroubu je podle obr. R2 a vztahu (1)

$$x = r\cos(\varphi + 45°) = \frac{\lambda r}{b\sqrt{2}}\,.$$

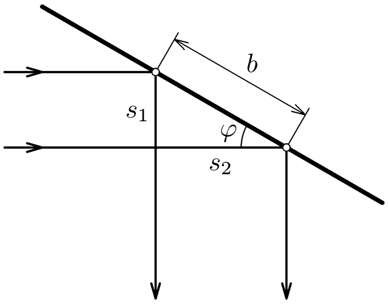
Z toho

$$\Delta x = \frac{\Delta\lambda r}{b\sqrt{2}}\,, \qquad r = \frac{b\Delta x\sqrt{2}}{\Delta\lambda}\,. \tag{2}$$

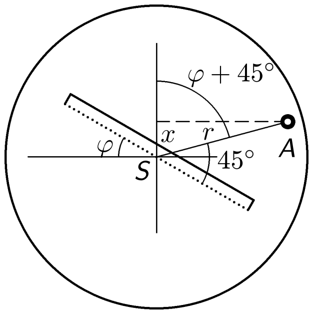
3 body

Pro dané hodnoty dostáváme $r = 49{,}9$ mm. **1 bod**

Obr. R1

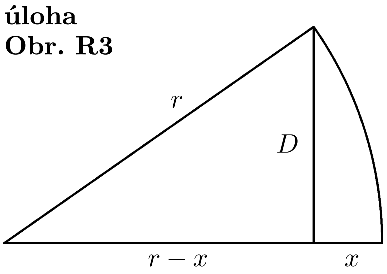


Obr. R2



4. úloha

Obr. R3



Poloměr r trajektorie částic určíme podle obr. R3:

$$r^2 - (r - x)^2 = D^2\,,$$

$$r = \frac{D^2 + x^2}{2x} = 1{,}30\ \mathrm{m}\,.$$

1 bod

a) Při klasickém řešení předpokládáme, že částice α má konstantní hmotnost $m = m_0 = 4{,}0026\ m_\mathrm{u} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ kg. Náboj částice α je dvojnásobkem elementárního náboje e. Hybnost p částice α určíme na základě rovnosti dostředivé a magnetické síly:

$$2Bev = \frac{mv^2}{r}\,, \qquad p = mv = 2Ber = 9{,}9977 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}\,.$$

Částice α se pohybuje rychlostí $v = \dfrac{p}{m_0} = 1{,}5042 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}05\ c\,.$

Kinetická energie částice α je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = 7{,}5191 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 4{,}6930\ \mathrm{MeV}\,.$$

3 body

b) Výpočet hybnosti provedený v části a) zůstává v platnosti i při relativistickém řešení. Kinetickou energii částice α vyjádříme ze vztahu mezi celkovou energií E, klidovou energií $E_0 = m_0 c^2 = 5{,}9737 \cdot 10^{-10}$ J a hybností p:

$$E^2 = (E_\mathrm{k} + E_0)^2 = E_0^2 + p^2c^2\,, \qquad E_\mathrm{k} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0\,,$$

$$E_\mathrm{k} = \sqrt{m_0^2 c^4 + (2Berc)^2} - m_0 c^2 = 7{,}5144 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 4{,}6900\ \mathrm{MeV}\,.$$

Klasický výsledek byl větší o $0{,}0047 \cdot 10^{-13}$ J $= 0{,}0030$ MeV, tj. o 0,064 %.

3 body

c) Pro částici β^- platí obdobné relativistické vztahy jako pro částici α. Náboj je však poloviční a má opačné znaménko, klidová energie má hodnotu $E_0 = 8{,}1871 \cdot 10^{-14}$ J $= 0{,}511$ MeV a kinetická energie hodnotu $9{,}73 \cdot 10^{-14}$ J. Klasické řešení nepřipadá v úvahu, neboť $E_\mathrm{k} > E_0$ a částice se tedy pohybuje rychlostí blízkou k rychlosti světla ve vakuu. Platí

$$p = Ber\,, \qquad p^2c^2 = (Berc)^2 = E_\mathrm{k}^2 + 2E_\mathrm{k}E_0\,,$$

$$B = \frac{\sqrt{E_\mathrm{k}^2 + 2E_\mathrm{k}E_0}}{erc} = 0{,}00255\ \mathrm{T}\,.$$

3 body

Poznámka: Užitím aproximačního vztahu $(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \doteq \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dots$ dostaneme

$$E_\mathrm{krelat} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0 = E_0 \left[\left(1 + \frac{p^2c^2}{E_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \doteq$$

$$\doteq \frac{p^2c^2}{2E_0} - \frac{p^4c^4}{8E_0^3} + \frac{p^6c^6}{E_0^5} = E_\mathrm{kklas} - 4{,}732 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}\ +\ 9{,}53 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} \doteq$$

$$\doteq E_\mathrm{kklas} - 4{,}72 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}\,.$$