Řešení úloh regionálního kola 38. ročníku FO, kat. A

Autoři úloh: I. Košinár, M. Randa, P. Šedivý a J. Štelina

1. úloha

a) Délka hlavní osy eliptické trajektorie je $2a = r_1 + r_2$, kde $r_1 = 7\,140$ km je poloměr původní kruhové trajektorie stanice a r_2 je poloměr trajektorie Měsíce (Obr. R1). Excentricita trajektorie je $e = (r_2 - r_1)/2$. Z charakteristického trojúhelníka elipsy určíme délku vedlejší poloosy

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2} = \sqrt{r_1 r_2}\,.$$

Po dosazení $a = 195\,600$ km, $b = 52\,360$ km. **2 body**

b) Dobu T_0 oběhu stanice na původní kruhové trajektorii můžeme určit z rovnosti gravitační a dostředivé síly:

$$\frac{\varkappa Mm}{r_1^2} = m \cdot \frac{4\pi^2 r_1}{T_0^2}\,, \qquad T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_1^3}{\varkappa M}\,.$$

Užitím třetího Keplerova zákona určíme dobu T oběhu stanice na eliptické trajektorii:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{a^3}{r_1^3}\,, \qquad T^2 = T_0^2 \cdot \frac{a^3}{r_1^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa M}\,.$$

Do nejvzdálenějšího bodu trajektorie doletí stanice za dobu

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\varkappa M}}\,.$$

Po dosazení $t = 4{,}30 \cdot 10^5$ s $\doteq 5$ dní. **4 body**

c) Podle druhého Keplerova zákona je velikost plošné rychlosti w konstantní. Je číselně rovna obsahu plochy opsané průvodičem za jednu sekundu. Určíme ji jako podíl obsahu plochy opsané eliptickou trajektorií a doby oběhu:

$$w = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2} v_1 r_1 = \frac{1}{2} v_2 r_2\,. \quad \text{Z toho} \quad v_1 = \frac{2w}{r_1}\,, \quad v_2 = \frac{2w}{r_2}\,.$$

Po dosazení $w = 3{,}74 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, $v_1 = 10\,500\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 195\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4 body

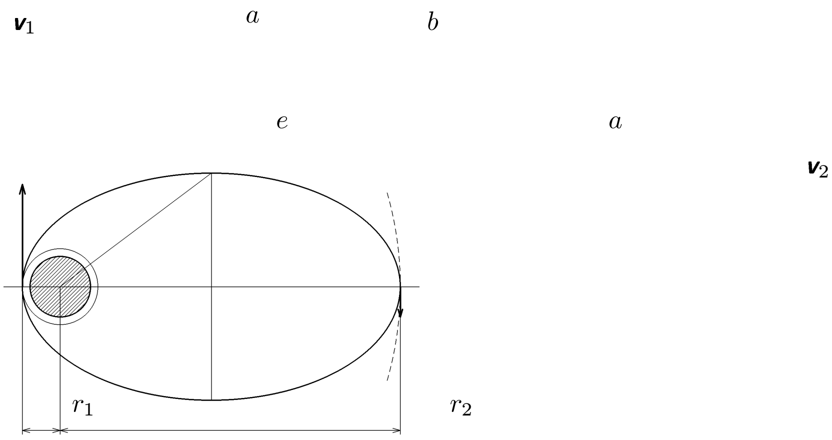
Jiná řešení: V blízkosti hlavního vrcholu můžeme elipsu nahradit oskulační kružnicí o poloměru $\varrho = b^2/a$. Z rovnosti dostředivé a gravitační síly dostaneme:

$$\frac{mv_1^2}{\varrho} = \frac{mv_1^2 a}{b^2} = \frac{\varkappa Mm}{r_1^2}, \quad \frac{mv_2^2}{\varrho} = \frac{mv_2^2 a}{b^2} = \frac{\varkappa Mm}{r_2^2},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M b^2}{a r_1^2}} = \sqrt{\frac{2\varkappa M r_2}{(r_1+r_2)r_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa M r_1}{(r_1+r_2)r_2}}.$$

K témuž výsledku můžeme dojít také řešením soustavy rovnic, které odvodíme ze zákona zachování momentu hybnosti a ze zákona zachování celkové mechanické energie:

$$mv_1r_1 = mv_2r_2, \qquad \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\varkappa Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\varkappa Mm}{r_2}.$$



Obr. R1

2. úloha

a) Bude-li jezdec v levé krajní poloze, nebude ve větvi s odporem r žádné napětí a nebude jí proto procházet žádný proud. Ampérmetrem bude procházet proud

$$I_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{e}}{R + R_\mathrm{i}} \,. \tag{1}$$

1 bod

Bude-li jezdec v pravé krajní poloze, vyjdeme ze schematu R2. Užitím Kirchhoffových zákonů dostaneme soustavu rovnic:

$$I = I_\mathrm{A} + I_r \,, \qquad rI_r = RI_\mathrm{A} \,, \qquad R_\mathrm{i}I + RI_\mathrm{A} = U_\mathrm{e} \,.$$

Dosazením z první a druhé rovnice do třetí a úpravou dostaneme

$$I_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{i} + \dfrac{R_\mathrm{i}R}{r} + R} = \frac{U_\mathrm{e}r}{R_\mathrm{i}r + R_\mathrm{i}R + rR} \,. \tag{2}$$

2 body

b) Bude-li jezdec mezi krajními polohami, vyjdeme ze schématu R3. Užitím Kirchhoffových zákonů dostaneme soustavu rovnic:

$$I = I_\mathrm{A} + I_r \,, \qquad rI_r = R\frac{x}{L}I_\mathrm{A} \,, \qquad \left(R_\mathrm{i} + R\frac{L-x}{L}\right) I + R\frac{x}{L}I_\mathrm{A} = U_\mathrm{e} \,.$$

Dosazením z první a druhé rovnice do třetí a úpravou dostaneme

$$I_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{e}rL^2}{-\,R^2x^2 + (R^2 + RR_\mathrm{i})Lx + (R_\mathrm{i}r + Rr)L^2} \,. \tag{3}$$

2 body

Výraz ve jmenovateli je kvadratický trojčlen se záporným kvadratickým členem. Jeho grafem je konkávní parabola (s vrcholem nahoře). Pro $x = 0$ a také pro $x = L$ je jmenovatel kladný. To znamená, že jmenovatel je kladný v celém intervalu $\langle 0, L\rangle$. Výsledek můžeme upravit na tvar

$$I_\mathrm{A} = \frac{U_\mathrm{e}\dfrac{rL^2}{R^2}}{\underbrace{-\left[x - \left(1 + \dfrac{R_\mathrm{i}}{R}\right)\dfrac{L}{2}\right]^2}_{\leq 0} + \underbrace{\left(1 + \dfrac{R_\mathrm{i}}{R}\right)^2\dfrac{L^2}{4} + \left(\dfrac{R_\mathrm{i}r}{R^2} + \dfrac{r}{R}\right)L^2}_{\text{konst.}}} \,. \tag{4}$$

Jmenovatel má maximální hodnotu

$$\left(1+\frac{R_\mathrm{i}}{R}\right)^2\frac{L^2}{4}+\left(\frac{R_\mathrm{i}r}{R^2}+\frac{r}{R}\right)L^2 \tag{5}$$

pro

$$x = L\frac{R+R_\mathrm{i}}{2R}\,. \tag{6}$$

2 body

Diskuse:

α Jestliže $R_\mathrm{i} < R$, platí $L\dfrac{R+R_\mathrm{i}}{2R} < L$. V takovém případě vztahy (6) a (5) určují polohu jezdce při které prochází ampérmetrem minimální proud a velikost tohoto minimálního proudu.

β Jestliže $R_\mathrm{i} \geq R$, prochází ampérmetrem minimální proud pro $x = L$ a jeho hodnota je určena vztahem (2).

γ V obou případech prochází ampérmatrem maximální proud, jestliže $x = 0$, a jeho velikost je určena vztahem (1).

3 body

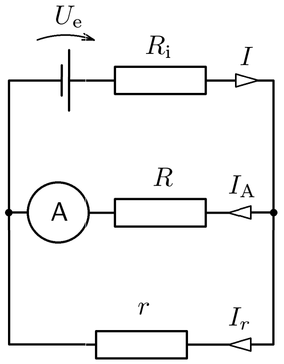
Řešení užitím diferenciálního počtu:

Jmenovatel zlomku ve vztahu (3) dosáhne maxima, jestliže

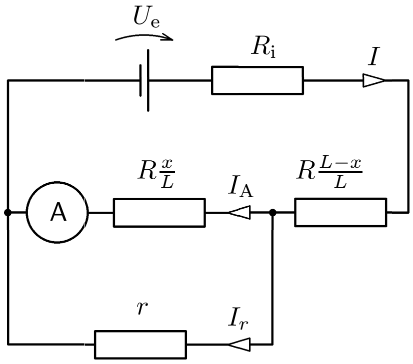
$$\frac{\mathrm{d}\left[-R^2x^2+L\left(R^2+RR_\mathrm{i}\right)x+\left(R_\mathrm{i}r+Rr\right)L^2\right]}{\mathrm{d}x} = -2R^2x+\left(R^2+RR_\mathrm{i}\right)L = 0\,,$$

$$x = L\frac{R+R_\mathrm{i}}{2R}\,.$$

Dosazením do (3) dostaneme (5).



R2



R3

3. úloha

a) Mřížka spektroskopu má periodu (mřížkovou konstantu)

$$b = \frac{1\ \mathrm{mm}}{150} = 6{,}67 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\,.$$

Elementární světelná vlnění, která vystupují ze sousedních štěrbin, mají ve směru, který svírá s optickou osou dalekohledu úhel α, dráhový rozdíl $\delta = b(\sin\varepsilon + \sin\alpha)$ (obr. R4). Má-li v tomto směru vzniknout v ohniskové rovině objektivu dalekohledu maximum prvního řádu pro světlo o vlnové délce λ, musí platit

$$\delta = b(\sin\varepsilon + \sin\alpha) = \lambda\,.$$

Pro světlo o vlnové délce λ_0 leží maximum na optické ose, tedy

$$\alpha_0 = 0\,, \qquad b\sin\varepsilon = \lambda_0 \qquad \varepsilon = \arcsin\frac{\lambda_0}{b}\,.$$

Po dosazení $\varepsilon = 4{,}95°$. **3 body**

b) Interferenční maximum světla o vlnové délce λ_1 vznikne ve směru, pro který platí

$$\sin\alpha_1 + \sin\varepsilon = \frac{\lambda_1}{b}\,, \qquad \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda_1}{b} - \sin\varepsilon\right) = \arcsin\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{b}\,.$$

Souřadnice příslušné spektrální čáry v ohnisové rovině objektivu dalekohledu je

$$x_1 = f_2 \operatorname{tg}\alpha_1\,.$$

Obdobné vztahy platí i pro světlo o vlnové délce λ_2.

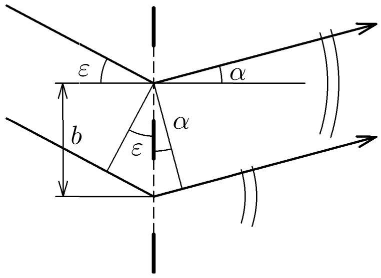
Po dosazení $\alpha_1 = 1{,}59°$, $x_1 = 2{,}78$ mm, $\alpha_2 = -1{,}59°$, $x_2 = -2{,}78$ mm.

Světlo o vlnové délce λ_1 vystupuje z okuláru ve směru, který svírá s optickou osou dalekohledu úhel α_1', pro který platí

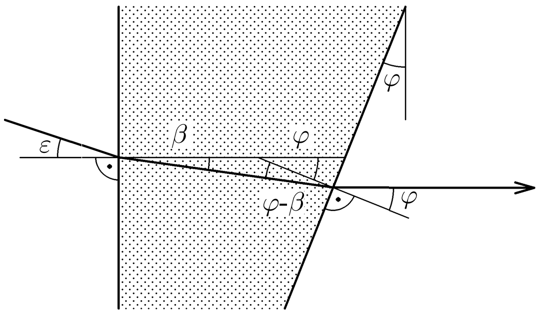
$$\operatorname{tg}\alpha_1' = -\frac{x_1}{f_3} \qquad \alpha_1' = -\operatorname{arctg}\frac{x_1}{f_3}\,.$$

Obdobný vztah platí i pro světlo o vlnové délce λ_2.

Po dosazení $\alpha_1' = -6{,}34°$, $\alpha_2' = 6{,}34°$.
Spektrum vidíme pod zorným úhlem $\alpha_2' - \alpha_1' \doteq 12{,}7°$. **4 body**



Obr. R4



Obr. R5

c) Lomem na stěnách mřížky je nutno usměrnit dopadající světlo do směru optické osy dalekohledu. Vyjdeme z obr. R5. Podle zákona lomu platí:

$$\sin\varepsilon = n\sin\beta\,, \qquad \sin\varphi = n\sin(\varphi-\beta) = n\sin\varphi\cos\beta - n\cos\varphi\sin\beta\,,$$

$$\sin\varphi(n\cos\beta - 1) = n\cos\varphi\sin\beta\,, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{n\sin\beta}{n\cos\beta-1} = \frac{\sin\varepsilon}{n\cos\beta-1}\,.$$

Po dosazení $\beta = 3{,}27°$, $\varphi = 9{,}6°$. **3 body**

4. úloha

a) Rychlé změny polohy pístu můžeme považovat za adiabatický děj. Podle Poissonova zákona

$$p_0(Sh_0)^{\varkappa} = p[S(h_0 - x)]^{\varkappa}\,, \qquad p = p_0\left(\frac{h_0}{h_0 - x}\right)^{\varkappa} = p_0\left(1 - \frac{x}{h_0}\right)^{-\varkappa}.$$

Pro $x \ll h_0$ můžeme psát

$$p \doteq p_0\left(1 + \varkappa\frac{x}{h_0}\right), \qquad (p - p_0)S \doteq \frac{p_0 S\varkappa}{h_0}\cdot x = k\cdot x\,, \qquad k = \frac{p_0 S\varkappa}{h_0}.$$

Po dosazení $k = 7{,}4\cdot 10^3\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. **4 body**

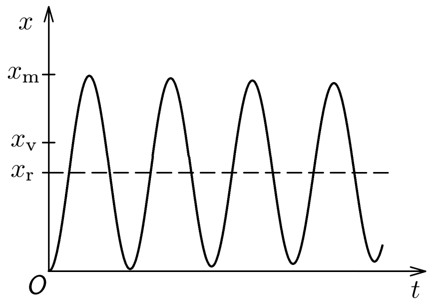
b) Zatížíme-li píst závažím, nastane rovnováha sil při posunutí x_r určeném rovnicí

$$Mg = (p - p_0)S = kx_\mathrm{r}\,.$$

Z toho

$$x_\mathrm{r} = \frac{Mg}{k}\,.$$

Výsledná síla působící na píst se závažím bude přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy a bude mít opačný směr: $F = k(x - x_\mathrm{r})$.



Obr. R6

Při velmi malém tření koná píst po uvolnění závaží téměř netlumené harmonické kmity s počáteční amplitudou x_r (obr. R6). Maximální posunutí pístu je

$$x_\mathrm{m} \doteq 2x_\mathrm{r} = \frac{2Mg}{k} = \frac{2Mgh_0}{\varkappa p_0 S}\,.$$

Po dosazení $r_\mathrm{r} = 6{,}6$ mm, $x_\mathrm{m} \doteq 13$ mm. **3 body**

c) Amplituda kmitů se i při malém tření postupně zmenšuje v důsledku ztrát mechanické energie. Kdyby byla tepelná izolace vzduchu ve válci dokonalá, píst by se zastavil v poloze určené posunutím x_r. V důsledku nedokonalé tepelné izolace se však teplota ve válci postupně vyrovná s teplotou okolí a konečné ustálené posunutí x_v je dáno rovnicí pro izotermický děj:

$$p_0V_0 = p_0\cdot Sh_0 = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\cdot S\,(h_0 - x_\mathrm{v})\,, \qquad x_\mathrm{v} = \frac{Mgh_0}{Mg + p_0 S}\,.$$

Po dosazení $x_\mathrm{v} = 8{,}9$ mm. **3 body**