ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie A

1. a) Úhlovou rychlost a úhlové zrychlení tyče při odchylce φ od počáteční svislé polohy určíme ze zákona zachování energie a z pohybové rovnice otáčivého pohybu:

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + mg\frac{l}{2}\cos\varphi = mg\frac{l}{2}\,, \qquad M = F_G\frac{l}{2}\sin\varphi = J\varepsilon\,,$$

kde $J = \dfrac{ml^2}{3}$ je moment setrvačnosti tyče vzhledem ke kolmé ose procházející jejím koncem. Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$\omega^2 = \frac{3g(1-\cos\varphi)}{l}\,, \qquad \varepsilon = \frac{3g\sin\varphi}{2l}\,.$$

Z toho určíme velikosti normálové a tečné složky zrychlení těžiště $\boldsymbol{T}$ tyče:

$$a_\mathrm{n} = \omega^2\frac{l}{2} = \frac{3}{2}g(1-\cos\varphi)\,, \qquad a_\mathrm{t} = \varepsilon\frac{l}{2} = \frac{3}{4}g\sin\varphi\,.$$

Na tyč působí během pohybu v těžišti tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a na dolním konci reakce podlahy $\boldsymbol{R}$. Jejich výslednice určuje zrychlení těžiště tyče.

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}\,.$$

S využitím obr. R1 rozepíšeme předcházející rovnici podle souřadnic:

$$R_x = ma_x = m(a_t\cos\varphi - a_n\sin\varphi) = \frac{1}{4}mg\sin\varphi(9\cos\varphi - 6)\,,$$

$$R_y = m(g - a_t\sin\varphi - a_n\cos\varphi) = mg\left[1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{3}{2}(1-\cos\varphi)\cos\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{4}mg(1 - 6\cos\varphi + 9\cos^2\varphi) = \frac{1}{4}mg(1-3\cos\varphi)^2\,.$$

Podle 3. pohybového zákona reakce podlahy $\boldsymbol{R}$ má opačný směr a je stejně velká jako síla $\boldsymbol{F}$, kterou se tyč opírá o podlahu,. Její velikost a směr určují vztahy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_x}{R_y} = \frac{\sin\varphi(9\cos\varphi - 6)}{(1-3\cos\varphi)^2}\,,$$

$$F = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{mg}{4}\sqrt{\sin^2\varphi(9\cos\varphi-6)^2 + (1-3\cos\varphi)^4}\,,$$

po úpravě

$$F = \frac{mg}{4}\sqrt{\sin^2\varphi + (10\cos\varphi - 6)^2}\,.$$

Příslušné grafy jsou na obr. R2 až R4.

Diskuse: Z obr. R2 vidíme, že v počáteční poloze se uplatní celá tíha tyče a síla $\boldsymbol{F}$ má velikost $mg = 19{,}6$ N. Během kácení se velikost síly $\boldsymbol{F}$ zmenšuje a pro úhel $\varphi \doteq 53°$ dosáhne minima $\mathrm{F}_{\min} \doteq 0{,}199 \cdot mg \doteq 3{,}91$ N. V závěrečné fázi pohybu se síla $\boldsymbol{F}$ zvětšuje a při dopadu má velikost přibližně $1{,}52 \cdot mg = 29{,}8$ N.
Z grafu na obr. R3 a R4 vidíme, že úhel α má na počátku stejnou orientaci jako úhel φ. Maxima o velikosti asi 20,3° dosáhne pro $\varphi_1 \doteq 35{,}1°$. V maximu platí $\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 0{,}37$. Pak se úhel α začne rychle zmenšovat, pro $\varphi_2 \doteq 48{,}2°$ dosáhne nuly a reace $\boldsymbol{R}$ se odkloní na opačnou stranu než tyč. Pro $\varphi_3 \doteq 70{,}5°$ dosáhne reakce vodorovného směru a začne se otáčet zpět. V okamžiku dopadu tyče platí $\alpha \doteq -80{,}5°$.
Odvozené vztahy zřejmě nezávisí na délce tyče l. **4 body**

b) Je-li tyč na dolním konci jen podepřena, vzniká vodorovná složka $\boldsymbol{R}_x$ reakce podlahy jako síla smykového tření, která musí splňovat vztah $|R_x| \le f R_y$, kde f je součinitel smykového tření mezi tyčí a podlahou. Z toho plyne

$$|\,\mathrm{tg}\,\alpha| = \frac{|R_x|}{R_y} \le f\,.$$

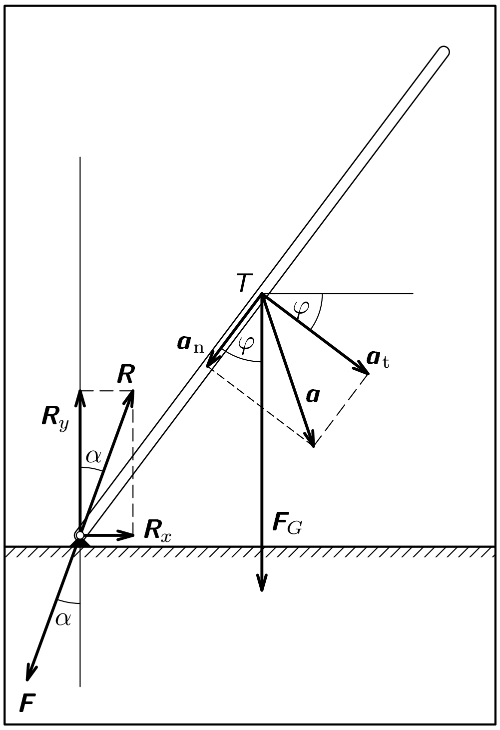
Ke sklouznutí tyče dojde v okamžiku překročení mezního úhlu

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \mathrm{arctg}\, f\,.$$

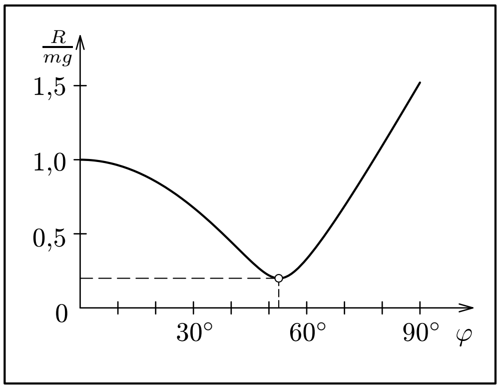
Pokud je hodnota součinitele smykového tření menší než 0,37, nastane tato situace ještě před dosažením úhlu φ_1 a konec tyče začne podkluzovat na opačnou stranu, než na kterou se tyč kácí. Je-li však součinitel smykového tření větší než 0,37, dojde ke sklouznutí až mezi úhly φ_2 a φ_3 a to na stejnou stranu, na kterou se tyč kácí.

Pro danou hodnotu $f = 0{,}20$ vyčteme z obr. R4, že tyč začne pokluzovat při sklonu $\varphi \doteq 16°$ a to na opačnou stranu, než na kterou se kácí. Pro hodnotu $f = 0{,}50$ dojde ke sklouznutí při sklonu $\varphi \doteq 52°$ a to na stejnou stranu, na kterou se tyč kácí. **4 body**

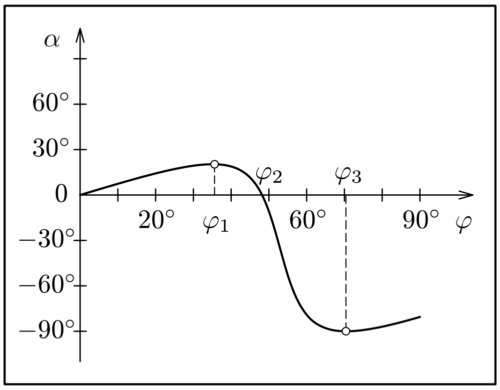
c) Za zprávu o provedených experimentech … **2 body**



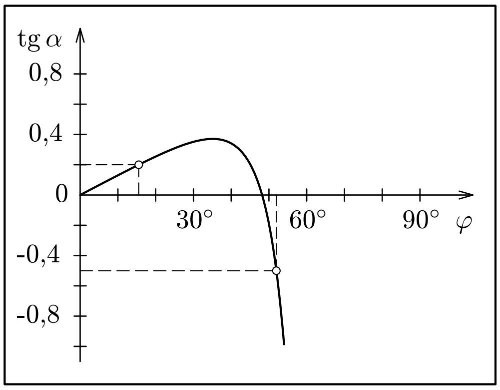
Obr. R1



Obr. R2

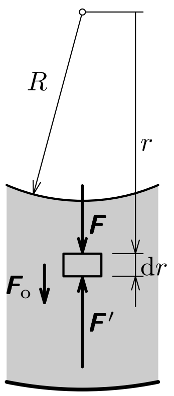


Obr. R3



Obr. R4

2. a) Z kapaliny vybereme válcový element s malou plochou S_0 a tloušťkou dr ve vzdálenosti r od osy válce (Obr. R5). Tlakové síly $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{F}'$ působící na podstavy elementu jsou v rovnováze se silou odstředivou d$\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$. Platí



Obr. R5

$$F_\mathrm{o} = F' - F\,, \qquad S_0 \cdot \mathrm{d}r \cdot \varrho_0 \cdot \omega^2 \cdot r = \mathrm{d}p \cdot S_0\,,$$

Hydrostatický tlak v hloubce h získáme integrací:

$$p = \varrho_0 \omega^2 \int\limits_R^{R+h} r \cdot \mathrm{d}r = \frac{\varrho_0 \omega^2 (h^2 + 2Rh)}{2}\,.$$

V rotujícím válci závisí hydrostatický tlak na hloubce kvadraticky.

2 body

b) Pokud není tyč zcela ponořena, působí na ni vztlaková síla, která je rovna tlakové síle na podstavu tyče:

$$F_\mathrm{vz} = pS = \frac{S\varrho_0 \omega^2 (h^2 + 2Rh)}{2}\,.$$

Tuto sílu porovnáme s odstředivou silou, která by působila na kapalinu vyplňující ponořenou část tyče:

$$F_\mathrm{o1} = S\varrho_0 \omega^2 \int\limits_R^{R+h} r \cdot \mathrm{d}r = \frac{S\varrho_0 \omega^2 (h^2 + 2Rh)}{2}\,.$$

Obě síly jsou stejně velké. *Na tyč částečně ponořenou do kapaliny tvořící „válcové moře“ působí vztlaková síla stejně velká jako odstředivá síla působící na kapalinu, která by vyplnila objem ponořené části tyče.*

2 body

c) Pokud se v rovnovážné poloze zavěšená tyč nedotýká pláště válce, platí $F_\mathrm{o2} = F_\mathrm{p} + F_\mathrm{vz}$, kde F_o je velikost odstředivé síly, která působí na tyč, $F_\mathrm{p} = kh$ je velikost síly, kterou působí pružina a F_vz je velikost vztlakové síly. Velikost odstředivé síly určíme integrací:

$$F_\mathrm{o2} = S\varrho\omega^2 \int\limits_{R+h-l}^{R+h} r \cdot \mathrm{d}r = S\varrho\omega^2 \frac{2l(R+h) - l^2}{2}\,.$$

Dosazením a úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$\frac{\omega^2 \varrho_0 S}{2} h^2 + (\omega^2 \varrho_0 SR + k - \omega^2 \varrho Sl)h + \frac{\omega^2 \varrho S l^2}{2} - \omega^2 \varrho SlR = 0\,.$$

2 body

Aby se tyč právě dotkla dna, tj. aby vyhovoval kořen $h = l$, musela by úhlová rychlost válce vyhovovat podmínkce

$$\omega^2 = \frac{2k}{S(\varrho - \varrho_0)(2R + l)} ,$$

což odvodíme dosazením hodnoty $h = l$ do rovnice a úpravou. Podmínka může být splněna jen v případě, že $\varrho > \varrho_0$. Budeme-li v tomto případě dále zvětšovat úhlovou rychlost, tyč se bude opírat o plášť válce a její poloha se nebude měnit.
Jestliže $\varrho < \varrho_0$, tyč nedosáhne dna při sebevětší úhlové rychlosti. **2 body**

d) Pro zadané hodnoty řešením kvadratické rovnice dostaneme $h = 11{,}7$ cm. **2 body**

3. Intenzita výsledného elektrického pole čtyř bodových nábojů je v kterémkoliv bodu prostoru vektorovým součtem intenzit, které by v daném bodu vyvolaly jednotlivé náboje. Potenciál je skalárním součtem potenciálů polí jednotlivých nábojů.

Bodový náboj okolo sebe vytváří radiální elektrické pole. V bodu, který je od bodového náboje posunut o vektor $\boldsymbol{r}$ (obr. R6), určíme elektrický potenciál a intenzitu elektrického pole pomocí vztahů:

$$\varphi = \frac{kQ}{r} , \quad \boldsymbol{E} = \frac{kQ}{r^3}\boldsymbol{r} , \quad \text{kde } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$$

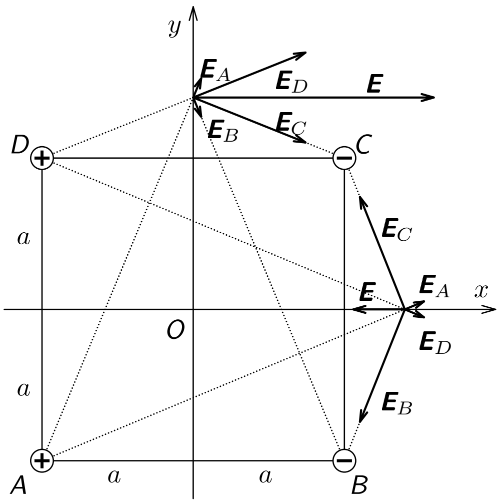
je konstanta úměrnosti Coulombova zákona. **2 body**

a) V bodě na ose x platí podle obr. R7:

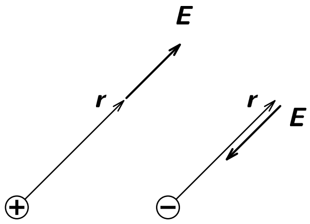
$$\varphi = 2\frac{kQ}{\sqrt{a^2 + (x + a)^2}} - 2\frac{kQ}{\sqrt{a^2 + (x - a)^2}} ,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_A + \boldsymbol{E}_B + \boldsymbol{E}_C + \boldsymbol{E}_D = \\ &= \frac{kQ}{(a^2 + (x + a)^2)^{1.5}}(x + a, a) + \frac{kQ}{(a^2 + (x + a)^2)^{1.5}}(x + a, -a) + \\ &\quad + \frac{-kQ}{(a^2 + (x - a)^2)^{1.5}}(x - a, a) + \frac{-kQ}{(a^2 + (x - a)^2)^{1.5}}(x - a, -a) .\end{aligned}$$

Obr. R7



Obr. R6



Výsledný vektor je rovnoběžný s osou x a má x-ovou souřadnici

$$E_x = 2kQ\left(\frac{x+a}{\left(a^2+(x+a)^2\right)^{1.5}} - \frac{x-a}{\left(a^2+(x-a)^2\right)^{1.5}}\right).$$

(Poznámka: Protože osa x je siločárou, platí také $E_x = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$.)

Odvozené vztahy se zjednoduší, zavedeme-li novou proměnnou $\xi = x/a$. Po úpravě:

$$\varphi = \frac{2kQ}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\xi+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(\xi-1)^2}}\right),$$

$$E_x = \frac{2kQ}{a^2}\left(\frac{\xi+1}{\left(1+(\xi+1)^2\right)^{1.5}} - \frac{\xi-1}{\left(1+(\xi-1)^2\right)^{1.5}}\right).$$

Diskuse: Vyjdeme z grafů na obr. R8 a z numerického řešení rovnice $E_x = 0$, která má kořeny $x_{1,2} \doteq \pm 1{,}166a$. Na kladné poloose x je potenciál záporný a v bodě x_1 dosahuje minima $\varphi_{\min} \doteq -1{,}135kQ/a$. Na záporné poloose x je potenciál kladný a v bodě x_2 dosahuje maxima $\varphi_{\max} \doteq 1{,}135kQ/a$.
V intervalu $\langle x_2, x_1\rangle$ je souřadnice E_x kladná, intenzita elektrického pole tedy je orientována ve směru kladné poloosy x. V bodě $x = 0$ dosahuje maximální velikosti $E_0 = \sqrt{2}kQ/a^2$.
V intervalech $\langle -\infty, x_2\rangle$ a $\langle x_1, \infty\rangle$ je souřadnice E_x záporná, intenzita elektrického pole tedy je orientována ve směru záporné poloosy x. Numerickým

řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{2kQ}{a^2}\left(\frac{1-2(\xi+1)^2}{\left(1+(\xi+1)^2\right)^{2.5}} - \frac{1-2(\xi-1)^2}{\left(1+(\xi-1)^2\right)^{2.5}}\right) = 0$$

nalezneme body $x_{3,4} \doteq \pm 1{,}778a$, kde velikost intenzity dosahuje lokálního extrému $E \doteq 0{,}55kQ/a^2$. **5 bodů**

b) Na celé ose y je potenciál nulový. Intenzitu určíme podobně jako v úloze a). Zjistíme, že ve všech bodech osy y má intenzita směr kladné poloosy x a její velikost je určena vztahem

$$E = \frac{2kQa}{\left(a^2+(y+a)^2\right)^{1,5}} + \frac{2kQa}{\left(a^2+(y-a)^2\right)^{1,5}}$$

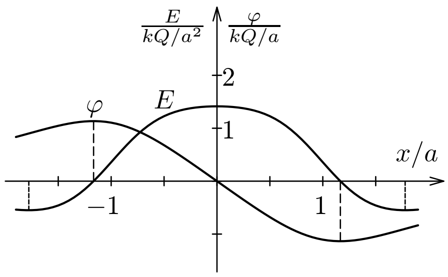
a po zavedení proměnné $\eta = y/a$

$$E = \frac{2kQ}{a^2}\left(\frac{1}{\left(1+(\eta+1)^2\right)^{1,5}} + \frac{1}{\left(1+(\eta-1)^2\right)^{1,5}}\right).$$

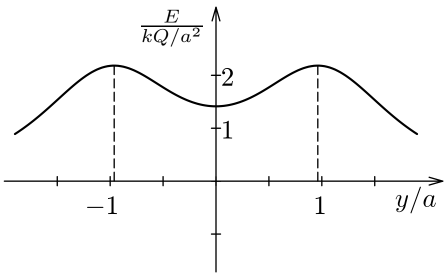
Diskuse: Vyjdeme z grafů na obr. R9. Velikost intenzity dosahuje maxima v bodech, jejichž polohu určíme numerickým řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\eta} = \frac{2kQ}{a^2}\left(\frac{3(\eta+1)}{\left(1+(\eta+1)^2\right)^{2.5}} + \frac{3(\eta-1)}{\left(1+(\eta-1)^2\right)^{2.5}}\right) = 0\,.$$

Dostaneme: $y_{1,2} \doteq \pm 0{,}962a\,, E \doteq 2{,}183kQ/a^2$. **3 body**



Obr. R8



Obr. R9

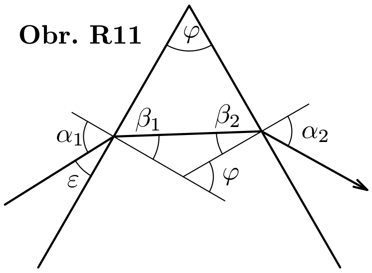
Výsledky úlohy jsou v souladu se siločárovým modelem na obr. R10:

4. a) Světlo všech vlnových délek dopadá na první lámavou stěnu hranolu pod stejným úhlem dopadu $\alpha_1 = 90° - \varepsilon = 62{,}0°$. Ze zákona lomu a věty o vnějším úhlu v trojúhelníku odvodíme (obr. R11):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n\,, \qquad \beta_2 = \varphi - \beta_1\,,$$

kde n je index lomu flintového skla. (Index lomu vzduchu je prakticky roven jedné.) V MFCh tabulkách jsou uvedeny indexy lomu flintového skla jen pro vlnové délky Fraunhoferových čar A až H. Lineární interpolací určíme indexy lomu pro krajní spektrální čáry heliového spektra:

Obr. R11



$$n_\mathrm{c} = 1,739\,, \qquad n_\mathrm{f} = 1{,}786\,.$$

Postupně vypočítáme:

$$\beta_{1\mathrm{c}} = 30{,}513°\,, \quad \beta_{2\mathrm{c}} = 29{,}487°\,, \quad \alpha_{2\mathrm{c}} = 58{,}87°\,,$$

$$\beta_{1\mathrm{f}} = 29{,}628°\,, \quad \beta_{2\mathrm{f}} = 30{,}372°\,, \quad \alpha_{2\mathrm{f}} = 64{,}56°\,.$$

3 body

Paprsky červeného světla při dopadu na objektiv dalekohledu svírají s jeho optickou osou úhel $\tau_\mathrm{c} = |90° - \alpha_{2\mathrm{c}} - \varepsilon| = 3{,}13°$. V ohniskové rovině objektivu se sbíhají v bodě A, jehož vzdálenost od ohniska je $|AF| = f_1 \cdot \mathrm{tg}\,\tau_\mathrm{c} = 5{,}5$ mm (obr. R12).

Paprsky fialového světla při dopadu na objektiv dalekohledu přicházejí z opačné strany optické osy a svírají s ní úhel $\tau_\mathrm{f} = |90° - \alpha_{2\mathrm{f}} - \varepsilon| = 2{,}56°$. V ohniskové rovině objektivu se sbíhají v bodě B, jehož vzdálenost od ohniska je $|BF| = f_1 \cdot \mathrm{tg}\,\tau_\mathrm{f} = 4{,}5$ mm.

Vzdálenost červené a fialové čáry v ohniskové rovině objektivu je $|AB| = 9{,}9$ mm.

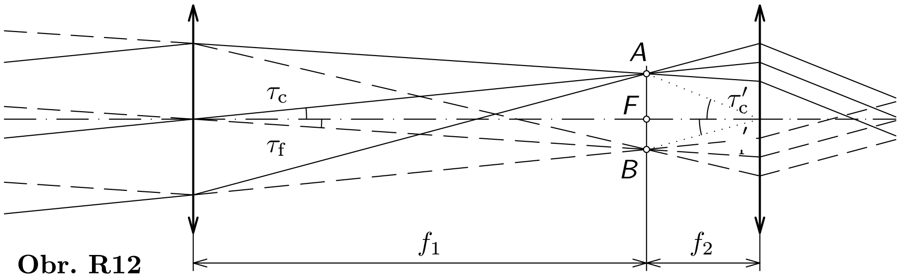
4 body

b) Z okuláru dalekohledu vystupují paprsky červeného světla jako rovnoběžný svazek, který svírá s optickou osou dalekohledu úhel τ'_c. Platí

$$\mathrm{tg}\,\tau'_\mathrm{c} = \mathrm{tg}\,\tau_\mathrm{c} \cdot \frac{f_1}{f_2}\,, \qquad \tau'_\mathrm{c} = 12{,}3°\,.$$

Paprsky fialového světla při výstupu z okuláru svírají s optickou osou dalekohledu úhel τ'_f, který určíme stejným způsobem. Dostaneme $\tau'_\mathrm{f} = 10{,}1°$.

Oba svazky paprsků spolu svírají zorný úhel spektra $\tau_c' + \tau_f' = 22{,}5°$.



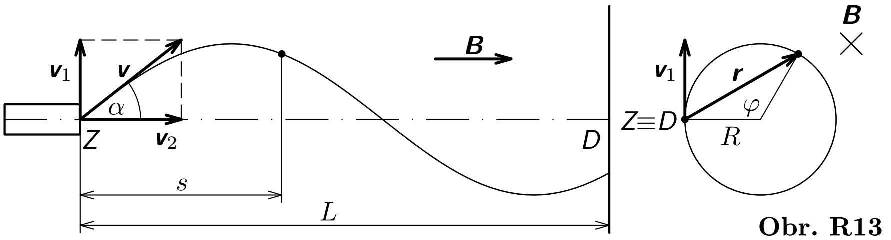
Obr. R12

5. Elektrony vyletují z trysky rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} = 4{,}19 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

kde m je hmotnost elektronu a e je elementární elektrický náboj. Tato rychlost je malá ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu, můžeme proto zanedbat relativistické zvětšení hmotnosti elektronu.

1 bod



Obr. R13

a) Na elektron, jehož rychlost $\boldsymbol{v}$ svírá se směrem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ úhel α působí magnetická síla F o velikosti $F = Bev\sin\alpha$, která je kolmá k vektorům $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$. Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ rozložíme na složku $\boldsymbol{v}_1$ kolmou k ose a ke směru magnetické indukce a na složku $\boldsymbol{v}_2$ rovnoběžnou s osou. Síla $\boldsymbol{F}$ mění jen směr složky $\boldsymbol{v}_1$. Pohyb elektronu probíhá po šroubovici a je složen z rovnoměrného pohybu ve směru osy a z rovnoměrného pohybu po kružnici v rovině kolmé k ose (obr R13). Poloměr této kružnice určíme z rovnosti dostředivé a magnetické síly:

$$\frac{mv_1^2}{R} = Bev_1\,, \qquad R = \frac{mv_1}{Be} = \frac{mv\sin\alpha}{Be} = \sin\alpha\sqrt{\frac{2Um}{B^2e}}\,.$$

Úhlová rychlost pohybu po kružnici je

$$\omega = \frac{v_1}{R} = \frac{Be}{m}\,.$$

Vzdálenost elektronu od osy se periodicky mění podle vztahu

$$r = 2R\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| = 2R\left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| = 2R\left|\sin\left(\frac{Bet}{2m}\right)\right|\,.$$

Dráha elektronu ve směru osy se zvětšuje podle vztahu $s = v_2 t = vt\cos\alpha$. V rovině stínítka platí

$$t = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{v\cos\alpha}\,, \quad r = 2R\left|\sin\left(\frac{BeL}{2mv\cos\alpha}\right)\right|\,.$$

3 body

Pro malý úhel α můžeme psát

$$\cos\alpha \doteq 1\,, \quad r = 2R\left|\sin\left(\frac{BeL}{2mv}\right)\right|\,.$$

Nejmenší magnetická indukce $\boldsymbol{B}_{\min}$, při které šroubovice elektronů s malou odchylkou protnou střed stínítka, splňuje vztah

$$\frac{B_{\min}eL}{2mv} = \pi\,, \qquad B_{\min} = \frac{2\pi mv}{eL} = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{2Um}{e}}\,.$$

Pro dané hodnoty $B_{\min} = 5{,}00\ \mathrm{mT}$. **3 body**

b) V poli s indukcí $B_{\min}$ platí

$$r = 2R\left|\sin\left(\frac{\pi}{\cos\alpha}\right)\right| = \sqrt{\frac{8Um}{B_{\min}^2e}}\sin\alpha\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi}{\cos\alpha}\right)\right|,.$$

Pro $\alpha = 30^\circ$ dostaneme $r = 2{,}2\ \mathrm{cm}$. **3 body**

6. Očekávané výsledky:

b) Vlnová délka světla HeNe laseru je 632,8 nm. Laserové diody používané v ukazovátkách vyzařují světlo o vlnové délce 670 nm.

c) d) Vzdálenost středů sousedních záznamových stop na kompaktním disku je 1,6 μm. Celá spirála záznamu je dlouhá asi 5 km.

7. Zahříváme-li desku na podložce, která nemá stejný teplotní součinitel délkové roztažnosti, dochází k jejímu posouvání po povrchu podložky. Je-li přítlačná síla rovnoměrně rozložena, posouvají se opačné konce desky na vodorovné podložce v opačných směrech stejně. Těžiště desky zůstává stále na stejném místě. Situace se změní, jestliže podložku nakloníme.

Roste-li teplota, horní konec desky se posouvá nahoru a dolní dolů. Mezi konci desky musí existovat bod M, který zůstává na stejném místě. Předpokládejme, že leží výše než těžiště desky, a jeho vzdálenost od těžiště označme x_1. Celá část desky nad bodem M se posouvá nahoru a proti tomuto pohybu působí síla tření F_{t1}. Celá část desky pod bodem M se posouvá dolů a proti tomuto pohybu působí síla tření F_{t2}.

$$F_{t1} = fF_{n1}\,, \qquad F_{t2} = fF_{n2}\,,$$

kde F_{n1} a F_{n2} jsou přítlačné síly v obou úsecích desky. Síly tření jsou v rovnováze s pohybovou složkou F_1 tíhové síly Platí

$$F_{t2} - F_{t1} = F_G \sin\alpha\,, \qquad F_{t2} + F_{t1} = f(F_{n1} + F_{n2}) = f \cdot F_G \cos\alpha\,,$$

$$\frac{F_{t2}}{F_{t1}} = \frac{F_{n2}}{F_{n1}} = \frac{\dfrac{L}{2} + x_1}{\dfrac{L}{2} - x_1}\,, \qquad \frac{F_{t2} - F_{t1}}{F_{t2} + F_{t1}} = \frac{\sin\alpha}{f\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$x_1 = \frac{L\operatorname{tg}\alpha}{2f}\,.$$

Kladné znaménko výsledku potvrzuje, že bod M je skutečně nad těžištěm. Při růstu teploty z t_1 na t_2 se hliníková deska i prkno prodlužují. Horní konec desky se oproti prknu posune o

$$s_1 = (\frac{L}{2} - x_1)(\alpha_{Al} - \alpha_d)(t_2 - t_1) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right)(\alpha_{Al} - \alpha_d)(t_2 - t_1)\,.$$

5 bodů

Klesá-li teplota, horní konec desky se posouvá dolů a dolní nahoru. Mezi konci desky musí opět existovat jediný bod N, který zůstává na stejném místě. Stejným způsobem jako u bodu M odvodíme, že leží níže než těžiště a je od něj vzdálen také o

$$x_1 = \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{2f}\,.$$

Při poklesu teploty z t_2 na t_1 se horní konec desky oproti prknu posune dolů o

$$s_2 = (\frac{L}{2} + x_1)(\alpha_{\mathrm{Al}} - \alpha_{\mathrm{d}})(t_2 - t_1) = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f}\right)(\alpha_{\mathrm{Al}} - \alpha_{\mathrm{d}})(t_2 - t_1)\,.$$

Celkové posunutí horního konce desky během jednoho teplotního cyklu je namířeno dolů a má velikost

$$s = s_2 - s_1 = \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{f}(\alpha_{\mathrm{Al}} - \alpha_{\mathrm{d}})(t_2 - t_1)\,.$$

Po proběhnutí N cyklů se horní konec hliníkové desky posune dolů o

$$Ns = \frac{NL \operatorname{tg} \alpha}{f}(\alpha_{\mathrm{Al}} - \alpha_{\mathrm{d}})(t_2 - t_1)\,.$$

4 body

Pro dané hodnoty $Ns = 7{,}1$ mm. **1 bod**

Autoři úloh: L. Mucha (5), K. Rauner (2), J. Slabeycius (7) a P. Šedivý (1,3,4,6)