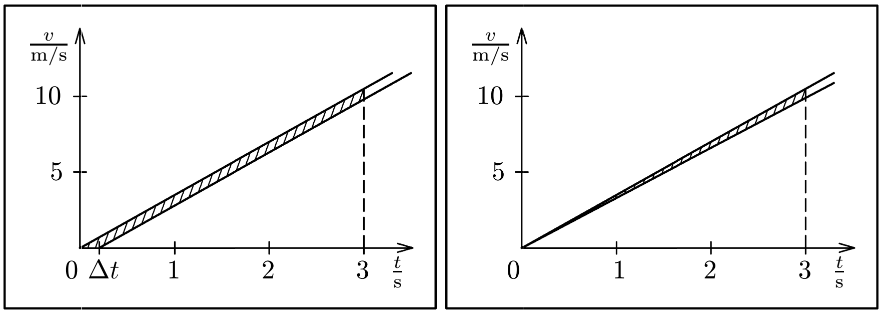
Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie D

1. a) V 1. i 2. případě má v každém časovém okamžiku $t > 0$ druhý automobil menší rychlost, tudíž nutně se automobily vzájemně vzdalují. Stejný závěr možno získat i z řešení úkolů b, c, d.

2 body

b)



Velikost vyšrafované plochy udává okamžitou vzdálenost automobilů v čase t.

2 body

c) Z grafů b) plyne

1. $d = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{pro} \quad t \leq \Delta t\,,$

$$d = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + (t - \Delta t) \cdot a\Delta t = a\Delta t(t - \frac{1}{2}\Delta t) \quad \text{pro} \quad t > \Delta t\,.$$

2. $d' = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2\,.$

2 body

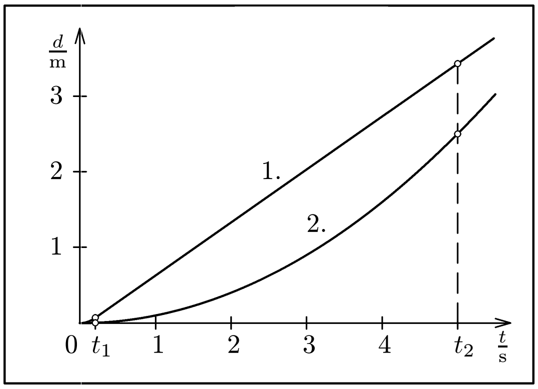
d) Po dosazení do vztahů odvozených v c) dostaneme v prvním případě

$$d_1 = 0{,}07\ \text{m}\,, \quad d_2 \doteq 3{,}4\ \text{m}\,.$$

V druhém případě dostaneme

$$d_1' = 0{,}004\ \text{m}\,, \quad d_2' = 2{,}5\ \text{m}\,.$$

2 body



e) 1. $\langle 0; t_1 \rangle$ parabola
$\langle t_1; t_2 \rangle$ úsečka
2. $\langle 0; t_2 \rangle$ parabola **2 body**

2. a) Obvodová rychlost pohybu sedačky je

$$v_0 = r\omega_0 = 3{,}6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

1 bod

b) Dráha sedačky uražená během zrychleného pohybu je

$$s = \frac{1}{2}a_\text{t}t_0^2\,, \qquad \text{kde} \qquad a_t = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0}$$

je tečné zrychlení sedačky. Po dosazení a úpravě máme

$$s = \frac{1}{2}r\omega_0 t_0 = 27 \text{ m}\,.$$

2 body

c) Pro počet otáček rovnoměrně zrychleného pohybu platí

$$N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\frac{1}{2}r\omega_0 t_0}{2\pi r} = \frac{\omega_0 t_0}{4\pi} \doteq 1{,}43\,.$$

2 body

d) Pro velikost tečného zrychlení platí

$$a_t = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0} = 0{,}24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,.$$

Pro velikost dostředivého zrychlení platí

$$a_\text{d} = \frac{v^2}{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad v = a_\text{t}t = \frac{r\omega_0}{t_0}t$$

je okamžitá obvodová rychlost. Po dosazení a úpravě máme

$$a_\text{d} = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2}t^2 \doteq 0{,}69 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,.$$

Velikost celkového zrychlení je

$$a = \sqrt{a_\text{d}^2 + a_\text{t}^2} = \frac{r\omega_0}{t_0}\sqrt{\frac{\omega_0^2 t^4}{t_0^2} + 1} \doteq 0{,}73 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,.$$

3 body

e) Dostředivé zrychlení s časem roste, tečné je konstantní. Po dosazení do rovnosti $a_\text{t} = a_\text{d}$ zjistíme čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}} \doteq 3{,}5 \text{ s}\,,$$

v němž jsou si velikosti zrychlení rovny. Pro $t < t_1$ je $a_\text{t} > a_\text{d}$, pro $t > t_1$ je $a_\text{t} < a_\text{d}$.

2 body

3. a) Označme hledané rychlosti v_1 (hranol), v_2 (válec). Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro hranol $v_1 = \sqrt{2gh}$.
Pro válec platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2\,, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{v_2}{r}\,,$$

z čehož dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}gh}\,.$$

Číselně vychází $v_1 = 5{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 = 4{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **3 body**

b) Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$ plyne pro čas

$$t = \frac{2s}{v}\,, \quad \text{kde} \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

a velikost rychlosti v je určena rovnicemi z úlohy a). Po dosazení a úpravě dostáváme
pro kvádr $t_1 = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
a pro válec $t_2 = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{3h}{g}}$.
Číselně vychází $t_1 \doteq 1{,}00\ \mathrm{s}$, $t_2 = 1{,}22\ \mathrm{s}$. **3 body**

c) Dosazením do rovnice pro zrychlení $a = \dfrac{v}{t}$ z úloh a), b) dostáváme po úpravě
pro kvádr $a_1 = g\sin\alpha$
a pro válec $a_2 = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$.
Číselně vychází $a_1 = 5{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. **2 body**

d) Zrychlení kvádru po nakloněné rovině s uvážením tření je

$$a_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,.$$

Z podmínky $a_1' = a_2$ plyne $f = \dfrac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$.
Číselně vychází $f = 0{,}23$. **2 body**

4. a) Jde o vodorovný vrh s počáteční rychlostí v_1.
Z rovnic $h = \frac{1}{2}gt^2,\ v_1 = \frac{d_1}{t}$ vodorovného vrhu plyne

$$v_1 = d_1\sqrt{\frac{g}{2h}} = 420\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Analogicky je rychlost po průstřelu prkna

$$v_2 = d_2\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d_2}{d_1}v_1 = 105\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Odporová síla o průměrné velikosti F vykonala na dráze x práci rovnou úbytku $-\Delta E_\mathrm{k}$ kinetické energie střely:

$$F = \frac{E_\mathrm{k1} - E_\mathrm{k2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{x} = \frac{mg\left(d_1^2 - d_2^2\right)}{4hx} = 28\ \mathrm{kN}\,.$$

2 body

c) Střela vykonala práci

$$W = Fx = \frac{mg\left(d_1^2 - d_2^2\right)}{4h} = 1650\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

d) Podle 2. Newtonova pohybového zákona je doba průletu střely prknem

$$t = \frac{p_1 - p_2}{F} = \frac{m(v_1 - v_2)}{F}\,.$$

Po dosazení z předcházejících vztahů a po úpravě dostaneme

$$t = \frac{2x}{d_1 + d_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3) a I. Volf (4)