ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie D

1. Označení veličin: $s = 380$ km, $v_1 = 360$ km$\cdot$h^{-1} = 100 m$\cdot$s^{-1}, $v_2 = 20$ m$\cdot$s^{-1}, $t_0 = 30$ min = 1800 s.

a) Doba letu za bezvětří je

$$t = \frac{s}{v_1} = 3800\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 3\ \mathrm{min}.$$

1 bod

b) Průměrná rychlost za bezvětří je $v_p = v_1 = 100$ m$\cdot$s^{-1}.

1 bod

c) Průměrná cestovní rychlost za bezvětří je

$$w_p = \frac{2s}{2t + t_0} = 80{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 290\ \mathrm{km\cdot h^{-!}}.$$

2 body

da) Doba letu po větru je

$$t' = \frac{s}{v_1 + v_2} = 3170\ \mathrm{s} \doteq 53\ \mathrm{min},$$

doba letu proti větru

$$t'' = \frac{s}{v_1 - v_2} = 4750\ \mathrm{s} \doteq 79\ \mathrm{min}.$$

2 body

db) Průměrná rychlost je stejná bez ohledu na směr větru:

$$v_p = \frac{2s}{t' + t''} = 96\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 345\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2 body

dc) Průměrná cestovní rychlost je též stejná bez ohledu na směr větru:

$$w_p = \frac{2s}{t' + t'' + t_0} = 78\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 280\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2 body

2. a) Vyjdeme ze vztahů

$$s_1 = \frac{g}{2}(t+T)^2 - \frac{g}{2}t^2 = gtT + \frac{g}{2}T^2\,, \tag{1}$$

$$s_2 = \frac{g}{2}(t+2T)^2 - \frac{g}{2}(T+t)^2 = gtT + 3\frac{g}{2}T^2\,. \tag{2}$$

Odečtením a úpravou dostaneme

$$s_2 - s_1 = gT^2\,, \quad T = \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{g}} = 0{,}080\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Úpravou (1) dostaneme

$$t = \frac{s_1 - \frac{g}{2}T^2}{gT} = \frac{s_1 - \frac{s_2 - s_1}{2}}{gT} = \frac{3s_1 - s_2}{2\sqrt{g\,(s_2 - s_1)}} = 0{,}234\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

c) Počáteční bod pohybu je nad bodem P_1 ve výšce

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{(3s_1 - s_2)^2}{8\,(s_2 - s_1)} = 0{,}27\ \mathrm{m}\,.$$

1 bod

d) Velikost rychlosti v bodu P_1 určíme ze vztahu

$$v_1 = gt = \frac{(3s_1 - s_2)}{2}\sqrt{\frac{g}{s_2 - s_1}} = 2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

1 bod

e) Dráhu s_3 mezi body P_3 a P_4 určíme ze vztahu

$$s_3 = \frac{g}{2}\,(t + 3T)^2 - \frac{g}{2}\,(t + 2T)^2 = gtT + 5\frac{g}{2}T^2\,, \tag{3}$$

$$s_3 = gtT + 3\frac{g}{2}T^2 + gT^2 = s_2 + (s_2 - s_1) = 2s_2 - s_1 = 0{,}341\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

3. a) Dráha 1. úseku je $s_1 = \frac{1}{2}vt_1$, dráha 2. úseku $s_2 = vt_2$. Z dráhy $s_3 = \frac{1}{2}vt_3$ získáme dobu pohybu na 3. úseku

$$t_3 = \frac{2s_3}{v}\,.$$

Hledaná průměrná rychlost je

$$v_p = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}\,.$$

Číselně vychází $s_1 = 290\ \mathrm{m}$, $s_2 = 1580\ \mathrm{m}$, $t_3 = 24\ \mathrm{s}$, $v_p = 13{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 48{,}4\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

2 body

b) Dráha uražená během poslední minuty pohybu je $s' = s_3 + v('-t_3)$. Po dosazení máme hledanou průměrnou rychlost

$$v_p' = \frac{s'}{t'} = \frac{s_3 + v(t' - t_3)}{t'} \doteq 13{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 48{,}0\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

2 body

c) Čas potřebný k uražení dráhy prvního kilometru je

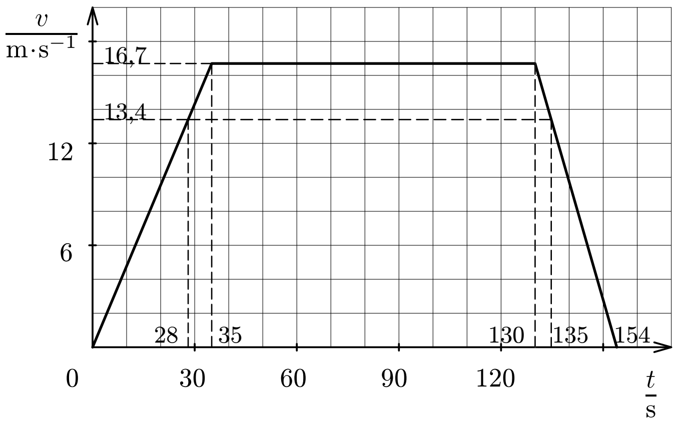
$$t'' = t_1 + \frac{s'' - s_1}{v}\,.$$

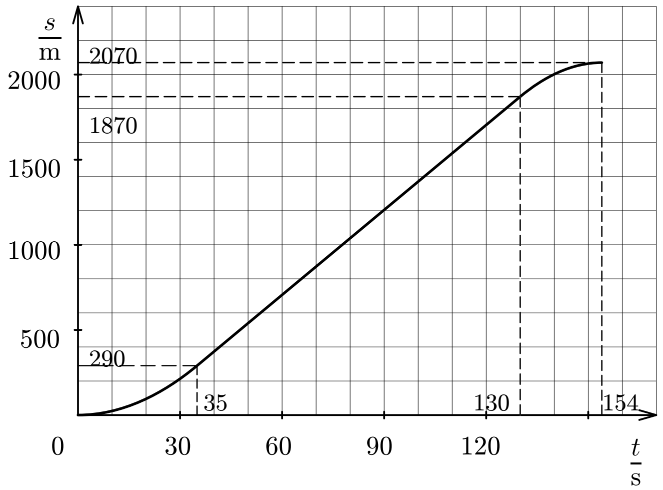
Po dosazení máme hledanou průměrnou rychlost

$$v_p'' = \frac{s''}{t''} = \frac{s''}{t_1 + \dfrac{s'' - s_1}{v}} \doteq 12{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 46{,}4\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

2 body

d) Grafy závislosti rychlosti a dráhy na čase





2 body

e) Z grafu $v = v(t)$ vyčteme hledanou dobu prvních 28 s a posledních 19 s, tj. celkem 47 s. **1 bod**

f) Z grafu $v = v(t)$ určíme hledanou dráhu jako obsah plochy pod grafem na časovém intervalu od 28 s do 135 s. Vychází přibližně 1770 m. **1 bod**

4. Označení veličin: $m = 1200\ \mathrm{kg}$, $r = 100\ \mathrm{m}$, $v_1 = 90\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 = 54\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

a) Doba průjezdu zatáčkou je

$$t = \frac{\pi r}{v_1} \doteq 12{,}6\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

b) Velikost „boční“ třecí síly nesmí klesnout pod velikost dostředivé síly odpovídající dané rychlosti:

$$F_t \leq F_d = \frac{m v_1^2}{r} = 7500\ \mathrm{N}\,.$$

1 bod

c) Brzdící síla $\boldsymbol{F}$ vykonala práci

$$W = F \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2\,,$$

z čehož plyne

$$F = m \frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r} \doteq 1530\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

d) Velikost dostředivé síly je na začátku zatáčky

$$F_1 = \frac{m v_1^2}{r} = 7500\ \mathrm{N}\,,$$

uprostřed zatáčky

$$F_2 = \frac{m v_2^2}{r} = 2700\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

e) Velikost tečného, dostředivého a celkového zrychlení je

$$a_t = \frac{F}{m} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r} \doteq 1{,}27\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \quad a_d = \frac{v_1^2}{r} = 6{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \doteq 6{,}38\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

3 body

f) Technika vhodná není. Při vjezdu do zatáčky je dokonce riziko smyku větší než při původním rovnoměrném pohybu, neboť je větší celkové zrychlení.

1 bod

5. a) Ze zákona zachování hybnosti při prvním rázu plyne

$$6mv = 7mu\,,$$

kde u je velikost rychlosti soupravy po prvním rázu. Z rovnice plyne

$$u = \frac{6v}{7} = 1{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Obdobně při druhém rázu platí $7mu = 10mw$, kde w je hledaná velikost rychlosti celé soupravy po druhém rázu. Z rovnice plyne

$$w = \frac{7u}{10} = \frac{3v}{5} = 1{,}26\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

4 body

b) Ze zákonů zachování hybnosti a mechanické energie při dokonale pružném druhém rázu plyne

$$\begin{aligned} 7mu &= 7mw_1 + 3mw_2 \\ \frac{7}{2}mu^2 &= \frac{7}{2}mw_1^2 + \frac{3}{2}mw_2^2\,, \end{aligned}$$

kde w_1 a w_2 jsou po řadě velikosti rychlostí lokomotivy s vagónem a soupravy trojice vagónů. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 7(u - w_1) &= 3w_2 \qquad (1) \\ 7(u^2 - w_1^2) &= 3w_2^2\,. \end{aligned}$$

Vydělením 2. rovnice 1. rovnicí máme

$$u + w_1 = w_2\,.$$

Dosazením w_2 do rovnice (1) dostaneme

$$w_1 = \frac{2u}{5} = \frac{12v}{35} = 0{,}72\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Dosazením w_1 do rovnice (1) dostaneme

$$w_2 = \frac{7u}{5} = \frac{6v}{5} = 2{,}52\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Směr pohybu každé soupravy bude po 2. rázu shodný s původním směrem pohybu lokomotivy.

6 bodů

7. a) Z 3. Keplerova zákona pro sluneční soustavu plyne

$$r_J = r_Z \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_Z^2}} = 5{,}20\, r_Z \doteq 778 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

2 body

b) Z 3. Keplerova zákona pro Jupiterovy Měsíce plyne

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} \doteq 9{,}32\, R_J\,.$$

Analogicky dostaneme

$$r_3 = 14{,}9\, R_J\,, \qquad r_4 = 26{,}2\, R_J.$$

3 body

c) Z totožnosti dostředivé a gravitační síly mezi Jupiterem a např. měsícem Io plyne pro hmotnost Jupitera

$$M_J = \frac{4\pi^2 r_1^2}{\kappa T_1^2}\,.$$

Střední hustota Jupitera je pak určena

$$\varrho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J} = \frac{3\pi r_1^3}{\kappa T_1^2 R_J^3}\,,$$

kde $r_1 = 5{,}86\, R_J$. Po dosazení a úpravě máme

$$\varrho_J = 5{,}86^3 \frac{3\pi}{\kappa T_1^2} \doteq 1220 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}\,.$$

5 bodů

Autoři úloh: J. Jírů (3), P. Šedivý (2, 6) a I. Volf (1, 4, 5, 7)