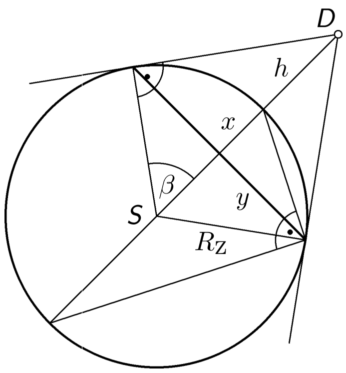
Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie C

1. a) Vyjdeme z obr. RC1. Plošný obsah kulového vrchlíku viditelného z družice tvoří 5% zemského povrchu. Z toho určíme výšku vrchlíku:

$$2\pi x R_{\mathrm{Z}} = 0{,}05 \cdot 4\pi R_{\mathrm{Z}}^2 \,, \qquad x = 0{,}10\ R_{\mathrm{Z}} .$$

Obr. RC1



Podle Euklidovy věty pro výšku platí:

$$y^2 = (h + x)(R_{\mathrm{Z}} - x) = x(2R_{\mathrm{Z}} - x) \,.$$

Z toho určíme

$$h = \frac{R_{\mathrm{Z}} \cdot x}{R_{\mathrm{Z}} - x} = \frac{0{,}10 R_{\mathrm{Z}}^2}{0{,}90 R_{\mathrm{Z}}} = \frac{1}{9} R_{\mathrm{Z}} = 708\ \mathrm{km} \,.$$

3 body

Rychlost družice určíme porovnáním gravitační a dostředivé síly:

$$m \frac{v^2}{R_{\mathrm{Z}} + h} = \varkappa \frac{m M_{\mathrm{Z}}}{(R_{\mathrm{Z}} + h)^2} \,.$$

Úpravou dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}} + h}} = 3 \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{10 R_{\mathrm{Z}}}} = 7{,}51\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}} \,.$$

2 body

Dobu oběhu určíme ze vztahu:

$$T = \frac{2\pi(R_{\mathrm{Z}} + h)}{v} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{10 R_{\mathrm{Z}}}{9}\right)^3 \frac{1}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}} \doteq 5\,925\ \mathrm{s} \doteq 1\ \mathrm{h}\ 39\ \mathrm{min} \,.$$

2 body

b) Družice se vzhledem k Zemi pohybuje úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0} = 9{,}875 \cdot 10^{-4} \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Dobu t pozorování určíme ze vztahu: $t = \dfrac{2\beta}{\omega}$.

Pro úhel β platí: $\cos\beta = \dfrac{R_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}} + h} = 0{,}90 \,, \qquad \beta = 25{,}84^\circ = 0{,}45103\ \mathrm{rad} \,.$

Po dosazení vychází $t = 913\ \mathrm{s} = 15\ \mathrm{min}\ 13\ \mathrm{s} \,.$ **3 body**

Parametry pohybu umělé družice Země, z níž je najednou vidět 5% povrchu Země, jsou: výška nad Zemí 708 km, rychlost 7,51 km·s^{-1}, doba oběhu 1 hodina 39 minut. Jedno místo na rovníku lze nepřetržitě pozorovat 15 minut 13 sekund.

2.a) Pro adiabatický děj platí: $p_0 V_0^{\varkappa} = pV^{\varkappa}$, kde $V = 4V_0$. Po dosazení a úpravě dostáváme:

$$p = \frac{p_0}{4^{\varkappa}} = 5{,}95 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

2 body

Ze stavové rovnice určíme T:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p \cdot 4V_0}{T}, \quad \text{po dosazení a úpravě} \quad T = T_0 \cdot 4^{1-\varkappa} = 238 \text{ K}.$$

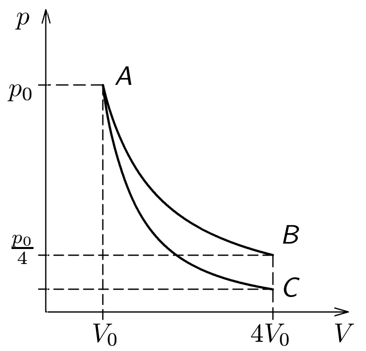
2 body

b) Pro adiabatický děj platí: $W' = -\Delta U = \frac{3}{2}Nk(T_0 - T)$. Součin Nk určíme ze stavové rovnice: $Nk = \frac{p_0 V_0}{T_0}$. Po dosazení a úpravě dostaneme pro práci vztah:

$$W' = \frac{3}{2}p_0 V_0 \left(1 - 4^{1-\varkappa}\right) = 543 \text{ J}.$$

3 body

c)



Pro izotermický děj platí:

$$p_0 V_0 = p_1 V, \quad \text{kde} \quad V = 4V_0.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$p_1 = \frac{p_0}{4} = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

1 bod

Obr. RC2
AB ... izoterma, AC ... adiabata

2 body

Konečná teplota po adiabatické expanzi je 238 K, tlak 5,95·10^4 Pa. Plyn vykoná práci 543 J . Po izotermické expanzi má plyn tlak 1,5·10^5 Pa.

3. a) Tuhost pružiny určíme z rovnosti sil:

$$mg = ky_0\,, \quad \text{z toho} \quad k = \frac{mg}{y_0} = 327\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\,.$$

1 bod

b) Prodloužení y_1 určíme z rovnosti sil:

$$m_1 g = ky_1\,, \quad \text{z toho} \quad y_1 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{m_1}{m} y_0 = 9{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\,.$$

1 bod

c) Pro úhlovou frekvenci tělesa zavěšeného na pružině platí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{mg}{m_2 y_0}} = 9{,}04\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

2 body

d) Určíme tuhost vzniklé pružiny. Představíme si sériové spojení dvou pružin o stejné délce $l_1 = l/2$ a stejné tuhosti k_1. Při tomto zapojení platí, že celkové prodloužení je součtem prodloužení jednotlivých pružin a působící síla je stejná. Platí tedy:

$$y = \frac{F}{k} = 2y_1 = 2\frac{F}{k_1} \quad \text{z toho} \quad k_1 = 2k\,.$$

2 body

Pro úhlovou frekvenci platí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{2mg}{m_2 y_0}} = 12{,}8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

1 bod

e) Každá z pružin má tuhost $2k$, jsou zavěšeny paralelně. Pro toto spojení platí, že prodloužení pružin jsou stejná: $y = y_1 = y_2$. Pro působící sílu platí $F = F_1 + F_2 = 2F_1$, po dosazení $k_2 y = 2k_1 y = 4ky$. Výsledná tuhost pružiny je

$$k_2 = 4k = 4\frac{mg}{y} = 1\,310\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\,.$$

3 body

Tuhost původní pružiny je 327 N·m^{-1}, prodloužení při zavěšení tělesa o hmotnosti 3,00 kg je 9,00 cm, úhlová frekvence kmitání při zavěšení tělesa o hmotnosti 4,00 kg je 9,04 rad·s^{-1}, úhlová frekvence kmitání tohoto tělesa na pružině o poloviční délce je 12,8 rad·s^{-1}, tuhost pružiny vzniklé paralelním spojením dvou pružin s poloviční délkou je 1 310 N·m^{-1}.

4. a), b) Napíšeme pohybové rovnice pro všechna tělesa:

$$
\begin{aligned}
(m+m_2)a &= (m+m_2)g - T_2\,, & (1)\\
ma &= T_1 - mg\,, & (2)\\
J\varepsilon &= T_2 r - T_1 r\,. & (3)
\end{aligned}
$$

Rovnici (3) upravíme:

$$m_1 a = 2(T_2 - T_1)\,. \qquad (4)$$

4 body

Řešením soustavy rovnic (1), (2) a (4) určíme hledané veličiny:

$$a = 2g\frac{m_2}{4m+2m_2+m_1} = 0{,}417\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

1 bod

$$T_2 = g\frac{(m+m_2)(4m+m_1)}{4m+2m_2+m_1} = 20{,}7\ \mathrm{N}\,.$$

1 bod

$$T_1 = mg\frac{4m+4m_2+m_1}{4m+2m_2+m_1} = 20{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

1 bod

c) Použijeme vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$h = \frac{1}{2}at^2\,, \quad \text{odtud} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{h(4m+2m_2+m_1)}{m_2 g}} = 2{,}19\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

d) Rychlost dopadu určíme ze vztahu:

$$v = at = 2\sqrt{\frac{ghm_2}{4m+2m_2+m_1}} = 0{,}914\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

1 bod

e) Kinetická energie kladky je dána vztahem:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 ah = \frac{ghm_1m_2}{4m+2m_2+m_1} = 0{,}209\ \mathrm{J}\,.$$

1 bod

Zrychlení soustavy je 0,417 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, tahové síly ve vlákně mají velikosti 20,5 N a 20,7 N, rychlost dopadu pravého tělesa na podložku je 0,914 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, těleso dopadne na podložku za 2,19 s, kinetická energie kladky v okamžiku dopadu pravého tělesa na podložku je 0,209 J.

Autoři úloh: I. Volf (1), R. Horáková (2, 3, 4)