ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie C

1. a) Za dobu t urazí první kapka dráhu:

$$s_1 = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2}\,,$$

následující kapka dráhu

$$s_2 = \frac{gt^2}{2}\,.$$

1 bod

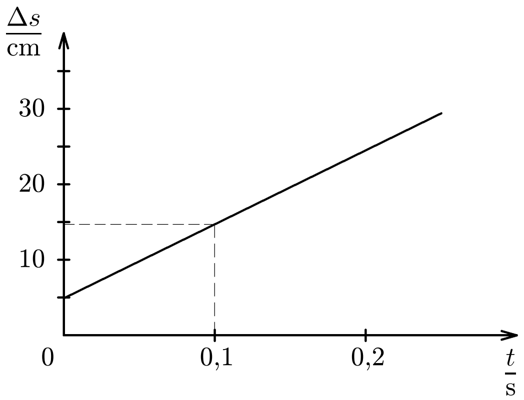
Vzdálenost obou kapek v čase t je

$$\Delta s = s_1 - s_2 = g\Delta t \cdot t + \frac{g(\Delta t)^2}{2}\,,$$

po dosazení:

$$\Delta s = 0,98\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot t + 0,049\ \mathrm{m}\,.$$

2 body



2 body

b) V čase $t_0 = 0$ s je vzdálenost mezi kapkami $\Delta s_0 = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$; za vzdálenost Δs dosadíme $n\Delta s_0 = \frac{ng(\Delta t)^2}{2}$:

$$\frac{ng(\Delta t)^2}{2} = g\Delta t \cdot t + \frac{g(\Delta t)^2}{2}\,,$$

1 bod

odtud určíme čas t:

$$t = \frac{(n-1)\Delta t}{2} = 0,50\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

c) Za dobu t_1 od odtržení první kapky urazí k-tá kapka dráhu

$$s_k = \frac{1}{2}g[t_1 - (k-1)\cdot\Delta t]^2 = \frac{1}{2}g[t_1^2 - 2t_1(k-1)\Delta t + (k-1)^2(\Delta t)^2]\,,$$

$(k+1)$. kapka dráhu

$$s_{k+1} = \frac{1}{2}g(t_1 - k\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g[t_1^2 - 2t_1 k\Delta t + k^2(\Delta t)^2]\,.$$

1 bod

Vzdálenost mezi kapkami je

$$\Delta s = s_k - s_{k+1} = \frac{1}{2}g\Delta t(2t_1 - 2k\Delta t + \Delta t) \doteq 1,55\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

2. a) Děj je izobarický, platí:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T}\,, \quad \text{kde} \quad V_0 = Sh_0\,,\ V = Sh\,.$$

Odtud $T = T_0\dfrac{h}{h_0} = \dfrac{9}{8}T_0 = 340\ \mathrm{K}\,.$ **2 body**

b) Práci vykonanou plynem určíme ze vztahu

$$W = p_0\Delta V = p_0 S(h - h_0)\,, \quad \text{kde} \quad p_0 = \left(\frac{mg}{S} + p_a\right)\,.$$

Po dosazení

$$W = \left(\frac{mg}{S} + p_a\right)S(h - h_0) = (mg + p_a S)(h - h_0) \doteq 83\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

c) Změnu vnitřní energie určíme ze vztahu

$$\Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T = \frac{3}{2}Nk(T - T_0)\,.$$

1 bod

Dosadíme ze stavových rovnic

$$p_0V_0 = NkT_0\,, \quad p_0V = NkT\,.$$

1 bod

Odtud po odečtení

$$Nk(T - T_0) = p_0(V - V_0) = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right)S(h - h_0)\,.$$

Po dosazení

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_a S + mg)(h - h_0) = 120\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

d) Teplo přijaté plynem určíme z prvního termodynamického zákona:

$$Q = \Delta U \ + W = \frac{5}{2}(p_a S + mg)(h - ho) = 210 \text{ J} .$$

2 body

3. a) Soustava koná harmonický pohyb. Zrychlení určíme ze vztahu $a = -\omega^2 y$, kde y je okamžitá výchylka, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence harmonického pohybu. Amplitudě výchylky y_m odpovídá amplituda zrychlení

$$a_m = -\omega^2 y_m . \qquad (1)$$

1 bod

Aby při kmitavém pohybu soustavy zůstalo závaží v klidu, musí být splněna podmínka:

$$|a_m| \leq g .$$

1 bod

Po dosazení do vztahu (1) dostaneme podmínku pro amlitudu výchylky:

$$y_m \leq \frac{gT^2}{4\pi^2} \doteq 0,27 \text{ m} .$$

Amplituda výchylky může být v intervalu $0 \text{ m} < y_m \leq 0,27 \text{ m}$. **3 body**

b) Pro periodu soustavy platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_1}{k}} , \qquad (2)$$

1 bod

kde k je tuhost pružiny. Úpravou vztahu (2) vyjádříme k:

$$k = \frac{4\pi^2(m + m_1)}{T^2} \qquad (3)$$

1 bod

V obou případech, tedy je-li hmotnost závaží m_1 nebo m_2 platí, že velikost tíhové a tahové síly je v rovnovážné poloze stejná:

$$(m + m_1)g = ky_1 , \qquad (m + m_2)g = k(y_1 + \Delta y) .$$

1 bod

Odečtením obou rovnic a dosazením vztahu (3) za k dostaneme vztah pro změnu výchylky při změně hmotnosti závaží:

$$\Delta y = \frac{(m_2 - m_1)gT^2}{4\pi^2(m + m_1)} \doteq 0,20 \text{ m} .$$

2 body

4. a) Vyjdeme z rovnice kontinuity a Bernoulliovy rovnice:

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}\,, \qquad p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2}\,.$$

Úpravou těchto rovnic vyjádříme v_1:

$$v_1 = d_2^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho\left(d_1^4 - d_2^4\right)}}\,.$$

2 body

Rozdíl tlaků Δp je roven hydrostatickému tlaku kapalinového sloupce o výšce h:

$$\Delta p = \varrho_0 g h\,.$$

Hustotu plynu určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{m R_m}{M_m}\,, \qquad \varrho = \frac{p_1 M_m}{R_m T_1} = 2,6\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Po dosazení

$$v_1 = d_2^2 \sqrt{\frac{2\varrho_0 R_m T_1 g h}{p_1 M_m \left(d_1^4 - d_2^4\right)}}\,.$$

2 body

Pro $h = h_{max}$ dostáváme $v_1 = 10{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

1 bod

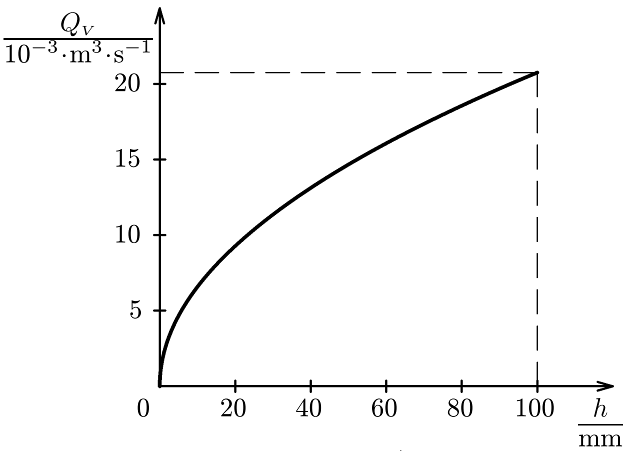
b) Objemový průtok plynu je

$$Q_V = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \pi d_1^2 d_2^2 \sqrt{\frac{\varrho_0 R_m T_1 g h}{8 p_1 M_m \left(d_1^4 - d_2^4\right)}} = k\sqrt{h}\,.$$

2 body

Pro zadané hodnoty je $k = 6{,}56 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^{2,5}}{\cdot}s^{-1}$.

1 bod



2 body

5. a) Válec je v rovnovážné poloze, tedy velikost tíhové a vztlakové síly je stejná:

$$\pi r_1^2 h \varrho_1 g = \frac{1}{2}\pi r_1^2 h \varrho g\,, \quad \text{odtud:} \quad \varrho_1 = \frac{\varrho}{2}$$ **1 bod**

b) Poněvadž koule má stejnou hmotnost a stejný objem jako válec, má materiál, ze kterého je koule vyrobena, stejnou hustotu jako materiál, ze kterého je vyroben válec. Platí

$$\varrho_2 = \varrho_1 = \frac{\varrho}{2}\,.$$ **1 bod**

c) Poloměr koule určíme z rovnosti objemů válce a koule:

$$\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi r_2^3\,, \quad \text{odtud:} \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{3r_1^2 h}{4}}\,.$$ **1 bod**

d) Hmotnost válce je $m_V = \pi r_1^2 h \varrho_1 = \frac{1}{2}\pi r_1^2 h \varrho$. Při zvednutí jeho těžiště o vzdálenost $h/2$ se potenciální energie tíhová zvětší o

$$\Delta E_{p1} = \frac{1}{4}\pi r_1^2 \varrho g h^2\,.$$ **1 bod**

Na uvolněné místo nateče kapalina o stejném objemu, potenciální energie tíhová se zmenší o hodnotu

$$\Delta E_{pk} = -\frac{1}{2}\pi r_1^2 \varrho g h \cdot \frac{h}{4} = -\frac{1}{8}\pi r_1^2 \varrho g h^2\,.$$ **1 bod**

Práce vykonaná při zvednutí válce těsně nad volný povrch kapaliny je

$$W_1 = \Delta E_{p1} + \Delta E_{pk} = \frac{1}{8}\pi r_1^2 \varrho g h^2\,.$$ **1 bod**

Obdobně pro kouli:
Koule má hmotnost stejnou jako válec, při zvednutí jejího těžiště o r_2 se potenciální energie tíhová zvýší o

$$\Delta E_{p2} = \frac{1}{2}\pi r_1^2 \varrho g h r_2\,.$$ **1 bod**

Na její místo vteče kapalina a potenciální energie tíhová se sníží o

$$\Delta E'_{pk} = -\frac{2}{3}\pi r_2^3 \varrho g \cdot \frac{3}{8} r_2\,.$$

1 bod

Práce vykonaná při zvednutí koule těsně nad volný povrch kapaliny je (po dosazení za r_2):

$$W_2 = \Delta E_{p2} + \Delta E_{pk}^{'} = \frac{5}{16}\pi r_1^2 \varrho g h \sqrt[3]{\frac{3r_1^2 h}{4}}\,.$$ **1 bod**

e) Při rovnosti $W_1 = W_2$ je splněna podmínka:

$$\frac{h}{r_1} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}\,.$$ **1 bod**

6. b) Zrychlení soustavy určíme ze vztahu $a_1 = 2s/t_1^2$. Ze soustavy pohybových rovnic:

$$\begin{aligned} ma_1 &= mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha - F\,, \\ m_1 a_1 &= F - m_1 g \end{aligned}$$

dostaneme

$$(m + m_1)a_1 = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - m_1 g\,,$$

$$fmg\cos\alpha = mg\sin\alpha - m_1 g - (m + m_1)a_1\,,$$

$$f = \operatorname{tg}\alpha - \frac{m_1}{m\cos\alpha} - \frac{(m + m_1)a_1}{mg\cos\alpha}\,.$$

c) Zrychlení soustavy určíme ze vztahu $a_2 = 2s/t_2^2$. Ze soustavy pohybových rovnic:

$$ma_2 = F - mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha\,, \qquad m_2 a_2 = m_2 g - F$$

dostaneme

$$(m + m_2)a_2 = m_2 g - mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha\,,$$

$$fmg\cos\alpha = m_2 g - mg\sin\alpha - (m + m_2)a_2\,,$$

$$f = \frac{m_2}{m\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha - \frac{(m + m_2)a_2}{mg\cos\alpha}\,.$$

7. a) Pokud kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 sjíždějí zrychleným pohybem dolů, platí pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g\sin\beta - F_1 - m_1 g f\cos\beta\,, \\ m_2 a &= m_2 g\sin\beta + F_1 - F_2 - m_2 g f\cos\beta\,, \\ m_3 a &= F_2 - m_3 g\,. \end{aligned}$$ **2 body**

Řešením této soustavy tří rovnic určíme a, F_1 a F_2:

$$\begin{aligned} a &= g\frac{(m_1+m_2)(\sin\beta - f\cos\beta) - m_3}{m_1+m_2+m_3}\,, \\ F_1 &= \frac{m_1 m_3 g(\sin\beta - f\cos\beta + 1)}{m_1+m_2+m_3}\,, \\ F_2 &= \frac{m_3 g(m_1+m_2)(\sin\beta - f\cos\beta + 1)}{m_1+m_2+m_3}\,. \end{aligned}$$

1 bod

Čitatel zlomku ve vztahu pro výpočet zrychlení musí být kladný. To je splněno, jestliže

$\sin\beta - f\cos\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\beta > f$ a také $m_3 < (m_1+m_2)(\sin\beta - f\cos\beta)\,.$

1 bod

b) Pokud kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 vyjíždějí zrychleným pohybem nahoru, platí pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - m_1 g\sin\beta - m_1 g f\cos\beta\,, \\ m_2 a &= F_2 - m_2 g\sin\beta - m_2 g f\cos\beta - F_1\,, \\ m_3 a &= m_3 g - F_2\,. \end{aligned}$$

2 body

Řešením této soustavy tří rovnic určíme a, F_1 a F_2:

$$\begin{aligned} a &= g\frac{m_3 - (m_1+m_2)(\sin\beta + f\cos\beta)}{m_1+m_2+m_3}\,, \\ F_1 &= \frac{m_1 m_3 g(\sin\beta + f\cos\beta + 1)}{m_1+m_2+m_3}\,, \\ F_2 &= \frac{m_3 g(m_1+m_2)(\sin\beta + f\cos\beta + 1)}{m_1+m_2+m_3}\,. \end{aligned}$$

1 bod

Čitatel zlomku ve vztahu pro výpočet zrychlení musí být opět kladný. To je splněno, jestliže

$$m_3 > (m_1+m_2)(\sin\beta + f\cos\beta)\,.$$

1 bod

c) Pro dané hodnoty dostáváme

$$(m_1+m_2)(sin\beta - f\cos\beta) = 0{,}192\ \mathrm{kg} > m_3\,, \qquad \mathrm{tg}\,\beta = 0{,}577 > f\,.$$

Nastane tedy situace podle a). Kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 sjedou po nakloněné rovině dolů. Po dosazení zadaných hodnot dostáváme:

$$a = 0{,}43\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,\ F_1 = 0{,}96\ \mathrm{N}\,,\ F_2 = 1{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

Autorka úloh: RNDr. R. Horáková