Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie C

1. Určíme nejprve celkový odpor sítě mezi uzly A, B při odpojeném zdroji. Síť nejprve překreslíme podle obr. R1. Vzhledem k symetrii sítě je v bodech D a F stejný potenciál. Větví DF proto neprochází proud a můžeme ji vypustit. Zbývající vodiče jdoucí do bodu F můžeme rozdělit do dvou samostatných větví. Tak dostaneme zjednodušenou síť podle obr. R2. Dalším zjednodušením dojdeme k síti na obr. R3, která má celkový odpor

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}} = \frac{6}{11} R \doteq 2{,}73\ \Omega\,.$$

5 bodů

Celkový proud odebíraný ze zdroje určíme pomocí Ohmova zákona pro celý obvod:

$$I = \frac{U_\mathrm{e}}{R_{AB} + R_\mathrm{i}} \doteq 3{,}8\ \mathrm{A}\,.$$

2 body

Z náhradního schématu na obr. R3 vidíme, že se celkový proud rozdělí na tři proudy

$$I_1 = I_{AB}\,, \quad I_2 = I_{AF} = I_{FB}\,, \quad I_3 = I_{AE} = I_{CB}$$

v poměru

$$I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{2R} : \frac{1}{3R} = 6 : 3 : 2\,.$$

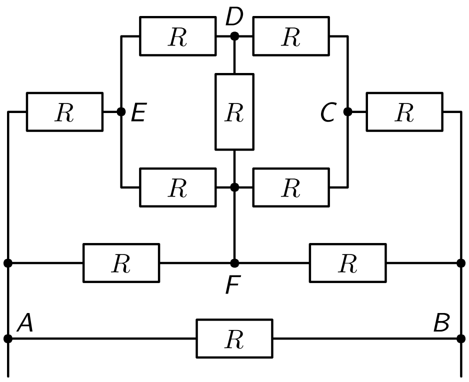
Z toho

$$I_1 = \frac{6}{11} I \doteq 2{,}1\ \mathrm{A}\,, \quad I_2 = \frac{3}{11} I \doteq 1{,}0 A\,, \quad I_3 = \frac{2}{11} I = 0{,}69\ \mathrm{A}\,.$$

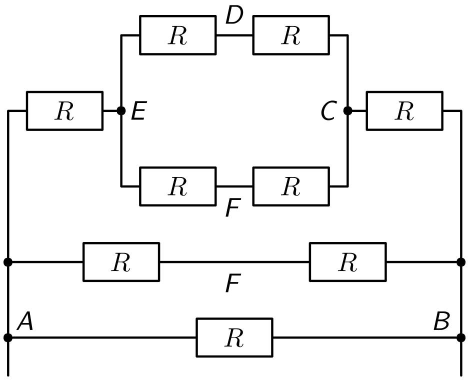
V uzlu E se proud I_3 dále dělí na dvě poloviny, které se v uzlu C spojují. Proto

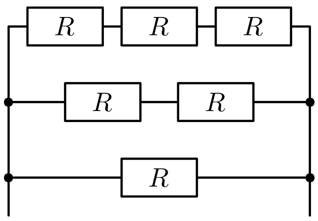
$$I_{EF} = I_{ED} = I_{FC} = I_{DC} = \frac{1}{11} I \doteq 0{,}35\ \mathrm{A}\,.$$

3 body



Obr. R1



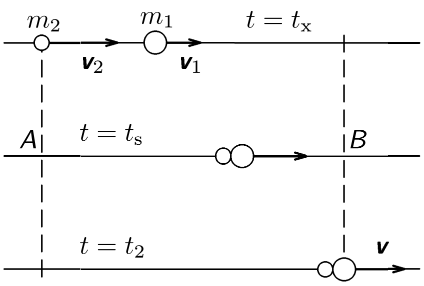


Obr. R2

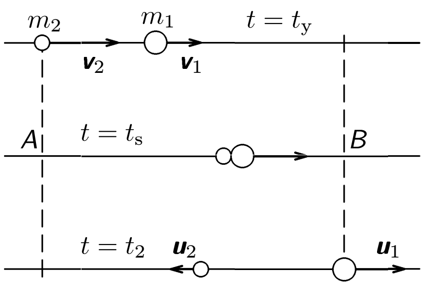
Obr. R3

2. a) Průběh děje v případě dokonale nepružného rázu znázorňuje obr. R4. Dobu od začátku děje do srážky označme t_s a rychlost obou kuliček po rázu označme $\boldsymbol{v}$. Z obrázku odvodíme:

$$\begin{aligned} v_1 t_\mathrm{s} &= v_2(t_\mathrm{s} - t_\mathrm{x}) \,, \\ v(t_2 - t_\mathrm{s}) &= l - v_1 t_\mathrm{s} \,. \end{aligned}$$



Obr. R4



Obr. R5

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$t_\mathrm{s} = \frac{vt_2 - l}{v - v_1} \,, \qquad t_\mathrm{x} = \frac{v_2 - v_1}{v_2} \cdot \frac{vt_2 - l}{v - v_1} \,.$$

Rychlost $\boldsymbol{v}$ určíme ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \,, \qquad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \,.$$

Po dosazení a úpravě

$$t_\mathrm{x} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) t_2 - l(m_1 + m_2)}{m_2 v_2} \,, \quad \text{pro dané hodnoty } \ t_\mathrm{x} = 1{,}30 \text{ s} \,.$$

4 body

b) Průběh děje v případě dokonale pružného rázu znázorňuje obr. R5. Rychlosti kuliček po rázu označme $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$. Analogicky k úloze a) odvodíme

$$t_\mathrm{s} = \frac{u_1 t_2 - l}{u_1 - v_1} \,, \qquad t_\mathrm{y} = \frac{v_2 - v_1}{v_2} \cdot \frac{u_1 t_2 - l}{u_1 - v_1} \,.$$

Rychlost $\boldsymbol{u}_1$ určíme ze zákona zachování hybnosti a ze zákona zachování mechanické energie:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad &\Rightarrow \quad m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_1 \,, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad &\Rightarrow \quad m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_1 v_1^2 \,. \end{aligned}$$

Po vydělení obou rovnic a další úpravě dostaneme:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2\,, \qquad u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Po dosazení a úpravě

$$t_\mathrm{y} = \frac{[v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2]t_2 - l(m_1 + m_2)}{2m_2v_2}\,,$$

$$\text{pro dané hodnoty } t_\mathrm{y} = 1{,}55\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

c) Největšího zkrácení doby letu dosáhneme, vypustíme-li druhou kuličku bezprostředně po kuličce první. V takovém případě platí při dokonale nepružné srážce:

$$t_{2\min} = \frac{l}{v} = \frac{l(m_1 + m_2)}{m_1v_1 + m_2v_2}\,, \quad \text{pro dané hodnoty} \ \ t_{2\min} = 0{,}87\ \mathrm{s}\,.$$

Při dokonale pružné srážce platí

$$t_{2\min} = \frac{l}{u_1} = \frac{l(m_1 + m_2)}{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}\,, \quad \text{pro dané hodnoty} \ \ t_{2\min} = 0{,}49\ \mathrm{s}\,.$$

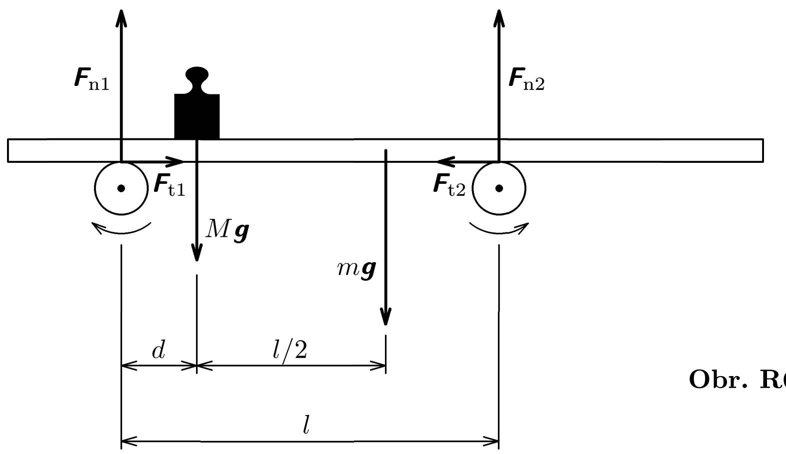
2 body

3. a) V rovnovážné poloze (obr. R6) musí být výsledná síla působící na soustavu závaží – deska nulová. Musí být tedy stejně velké třecí síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}2}$, kterými působí na desku oba válce. Proto musí být stejně velké i normálové síly:

$$F_{\mathrm{n}1} = F_{\mathrm{n}2} = \frac{M+m}{2} g \ .$$

Deska se neotáčí, proto musí být splněna momentová věta vzhledem k libovolně zvolené ose. Pro osu v místě dotyku levého válce dostaneme:

$$Mgd + mg\left(d + \frac{l}{2}\right) = \frac{M+m}{2} gl \,, \quad \text{po úpravě} \quad d = \frac{l}{2} \cdot \frac{M}{M+m} \,.$$



Obr. R6

2 body

b) Po vychýlení desky z rovnovážné polohy (obr. R7) na ni působí celková síla vodorovného směru o souřadnici $F = F_{\mathrm{t}1} - F_{\mathrm{t}2} = f(F_{\mathrm{n}1} - F_{\mathrm{n}2})$. Deska se neotáčí, proto opět platí momentová věta. Pro osu v místě dotyku levého válce dostaneme:

$$Mg(d+x) + mg\left(d + x + \frac{l}{2}\right) = F_{\mathrm{n}2} \cdot l \,,$$

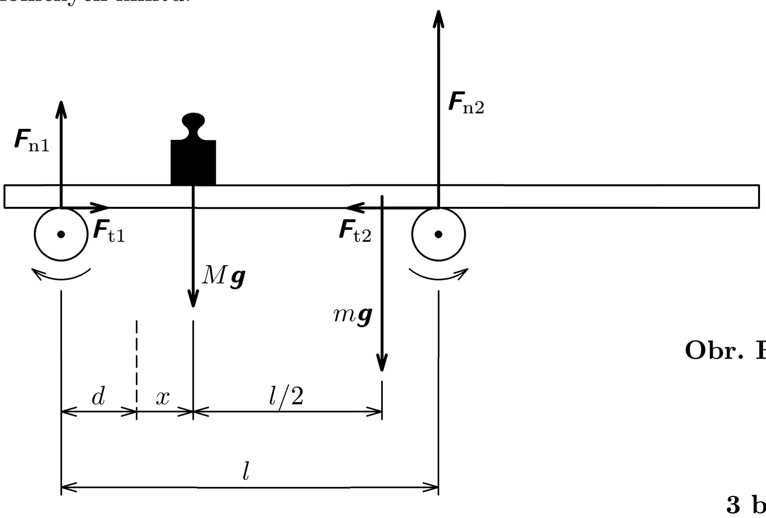
po úpravě

$$F_{\mathrm{n}2} = \frac{(M+m)g}{2} + \frac{(M+m)gx}{l} \,,$$

$$F_{\mathrm{n}1} = (M+m)g - F_{\mathrm{n}2} = \frac{(M+m)g}{2} - \frac{(M+m)gx}{l} \,,$$

$$F = f(F_{\mathrm{n}1} - F_{\mathrm{n}2}) = -\frac{2(M+m)gf}{l} \cdot x = -k \cdot x \,.$$

Výsledná síla je přímo úměrná výchylce a má opačný směr. Protože na počátku je deska se závažím vychýlena z rovnovážné polohy, dojde ke vzniku harmonických kmitů.



Obr. R7

3 body

c) Úhlovou frekvenci a periodu kmitů určíme ze vztahů:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{2gf}{l}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2gf}}\,.$$

Na počátku je deska v klidu, je tedy v krajní poloze kmitů, ve vzdálenosti d od rovnovážné polohy. Kmity mají amplitudu $x_\mathrm{m} = d$.
Velikost rychlosti desky při průchodu rovnovážnou polohou je

$$v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2gf}{l}} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{gfl}{2}} \cdot \frac{M}{M+m}\,.$$

2 body

d) Závaží udržuje v kmitavém pohybu tření mezi ním a deskou. V krajní poloze, kde zrychlení dosahuje maximální hodnoty a_m, musí platit

$$Ma_\mathrm{m} = M\omega^2 x_\mathrm{m} = M \cdot \frac{2gf}{l} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} = \frac{gfM^2}{M+m} < Mgf'\,,$$

$$f' > f\frac{M}{M+m}\,.$$

2 body

e) V počáteční poloze přesahuje deska přes válce na obou stranách stejně daleko. Během kmitů se posune z původní polohy až do vzdálenosti $2x_\mathrm{m} = 2d$. Celková délka desky proto musí splňovat vztah $L > l + 4d$. **1 bod**

4. a, b) Na cyklistu, který jede bez šlapání, má dynamický účinek pohybová složka tíhové síly a odpor vzduchu, pro který platí Newtonův vztah $F_\mathrm{o} = 0{,}5 \cdot CS\varrho v^2$, kde v je relativní rychlost tělesa vůči vzduchu. Po dosažení mezní rychlosti se účinky obou sil ruší. Za bezvětří

$$mg \sin\alpha = 0{,}5 \cdot CS\varrho v_1^2 = K v_1^2 \,.$$

$K = \dfrac{mg\sin\alpha}{v_1^2}$ je konstanta úměrnosti v Newtonově vztahu daná hustotou vzduchu, rozměry a tvarem cyklisty. Pro dané hodnoty $K = 0{,}278\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Při jízdě po větru

$$mg\sin\alpha = K(v_2 - v_\mathrm{v})^2 \,,$$

při jízdě proti větru

$$mg\sin\alpha = K(v_3 + v_\mathrm{v})^2 \,.$$

Porovnáním dostáváme

$$v_2 = v_1 + v_\mathrm{v} \,, \qquad v_3 = v_1 - v_\mathrm{v} \,.$$

Pro dané hodnoty $v_2 = 15{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 57\ \mathrm{km/h}$, $v_3 = 5{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 21\ \mathrm{km/h}$.

3 body

c) Při šlapání s kopce platí při rovnoměrném pohybu rychlostí v_4

$$mg\sin\alpha + F_1 = K v_4^2 = \frac{mg\sin\alpha}{v_1^2} v_4^2 \,, \qquad F_1 = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^2}{v_1^2} - 1\right) \,,$$

kde F_1 je velikost síly, kterou cyklista vyvinul šlapáním; pro dané hodnoty $F_1 = 29{,}9\ \mathrm{N}$. Cyklista šlape s výkonem

$$P = F_1 v_4 = K v_4^3 - v_4 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^3}{v_1^2} - v_4\right) \,.$$

Pro dané hodnoty $P = 448\ \mathrm{W} \doteq 450\ \mathrm{W}$. **3 body**

d) Při rovnoměrné jízdě do kopce rychlostí v_5 musí cyklista vyvinout sílu o velikosti

$$F_2 = K v_5^2 + mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^2}{v_1^2} + 1\right)$$

a pro jeho výkon platí

$$P = F_2 v_5 = K v_5^3 + v_5 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^3}{v_1^2} + v_5\right) \,.$$

Dostáváme rovnici třetího stupně s neznámou v_5. Po dosazení číselných hodnot a numerickém řešení dostaneme $v_5 = 8{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 31\ \mathrm{km/h}$. **4 body**

Autoři úloh: M. Randa (1, 3), V. Vícha (2) a P. Šedivý (4)