ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie B

1. a) Potenciální energii kuličky při projetí bodem A volíme jako nulovou. Ze zákona zachování energie vyplývá:

$$mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2\,,$$

kde v_1 je velikost rychlosti středu kuličky a $\omega_1 = \dfrac{v_1}{R}$ je úhlová rychlost kuličky při průjezdu bodem A. Platí tedy

$$mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_1^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_1^2\,, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gH}\,.$$

2 body

b) Při průjezdu bodem B působí kulička na plochu odstředivou silou o velikosti

$$F_2 = F_o = \frac{mv_2^2}{r-R}\,.$$

Velikost v_2 rychlosti středu kuličky určíme opět ze zákona zachování energie:

$$mg(H+R) = mgr + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_2^2}{R^2} = mgr + \frac{7}{10}mv_2^2\,.$$

Sloučením obou vztahů dostaneme:

$$F_2 = \frac{10}{7}mg\frac{H-r+R}{r-R}\,.$$

3 body

c) Aby kulička byla i při průjezdu nejvyšším bodem přitlačena na plochu, musí zde být dostředivá síla větší nebo rovna síle tíhové:

$$\frac{mv_3^2}{r-R} \geq mg\,.$$

Velikost v_3 rychlosti středu kuličky určíme z rovnice

$$mg(H+R) = mg(2r-R) + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_3^2}{R^2} = mg(2r-R) + \frac{7}{10}mv_3^2\,.$$

Po dosazení a úpravě:

$$r \leq R + \frac{10}{27}H\,.$$

3 body

d) Dosadíme do předcházejícího vztahu a dostaneme:

$$r \leq R + \frac{20}{27}r\,, \qquad R \geq \frac{7}{27}r = \frac{7}{54}H\,.$$

2 body

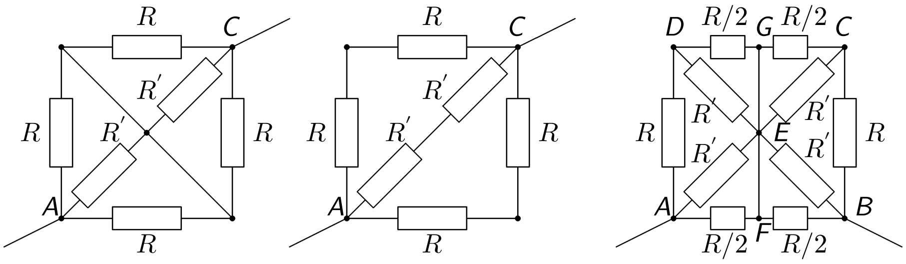
2. Odpor větve *AB* je $R = \varrho\dfrac{a}{S}$, kde a je délka strany čtverce, S je průřez vodiče a ϱ je měrný elektrický odpor materiálu, ze kterého je drát vyroben. Stejný odpor mají také větve *BC*, *CD* a *AD*. Odpor větve *AE* (rovněž *BE*, *CE*, *DE*) je

$$R' = \varrho\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{S} = R\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

a) R_{AC}:
V bodech *B*, *D* a *E* je stejný potenciál. Lze proto větve *BE*, *DE* nahradit zkratem (obr. RB-1a) nebo vypustit (obr. RB 1.b). V obou případech dojdeme ke stejnému odporu R_{AC}:

$$\frac{1}{R_{AC}} = 2\frac{1}{2R} + \frac{1}{2\cdot R\frac{\sqrt{2}}{2}}\,,\qquad R_{AC} = R\left(2-\sqrt{2}\right) \doteq 0{,}586\,R\,.$$

3 body



Obr. RB-1.a **Obr. RB-1.b** **Obr. RB-2**

b) $R_{AB} (= R_{AD})$:
Střed *F* větve *AB* a střed *G* větve *CD* mají stejný potenciál jako bod *E*. Z náhradního schématu na obr. RB-2 plyne:

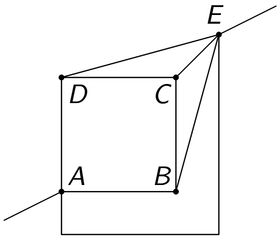
$$R_{AB} = \frac{2}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'}}}} = \cdots = R\cdot\frac{9-4\sqrt{2}}{7} \doteq 0{,}478\,R\,.$$

3 body

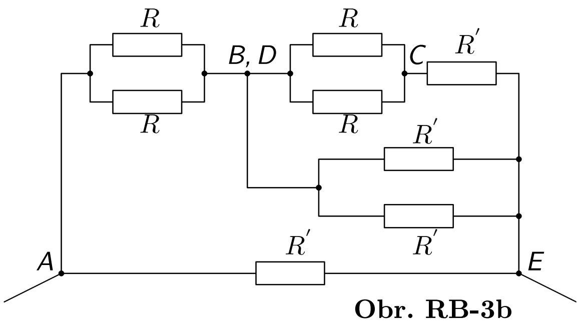
c) R_{AE}:
Pro přehlednost překreslíme schéma podle obr. RB-3a. V bodech *B* a *D* je stejný potenciál. Z náhradního schématu na obr. RB-3b plyne:

$$R_{AE} = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{1}{\frac{2}{R'} + \frac{1}{\frac{R}{2} + R'}}}} = \cdots = R\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{7} \doteq 0{,}369\,R\,.$$

3 body



Obr. RB-3a



Obr. RB-3b

Odpory jsou v poměru

$$R_{AC} : R_{AB} : R_{AE} = 0{,}586 : 0{,}478 : 0{,}369\,.$$

Největší odpor naměříme mezi uzly *A* a *C*, nejmenší mezi uzly *A* a *E*. **1 bod**

3. a) Označíme výšky hladin kapalin v nádobách h_1 a h_2. Pro $x = 0$ mají kapaliny hmotnosti

$$m_1 = S_1 h_1 \varrho_1\,, \qquad m_2^{'} = S_2 h_2 \varrho_2 + S l \varrho_2$$

a hydrostatický tlak ve spojovací trubici je $p = h_1 \varrho_1 g = h_2 \varrho_2 g$.

$$\text{Odtud} \qquad m_2^{'} = \frac{S_2}{S_1} m_1 + S l \varrho_2\,.$$

Podobně pro druhou krajní polohu rozhraní, pro $x = l$, dostaneme

$$m_2^{''} = \frac{S_2}{S_1} m_1 - \frac{S_2 S}{S_1} l \varrho_1\,.$$

Má-li rozhraní ležet ve spojovací trubici, musí hmotnost m_2 splňovat podmínku

$$\frac{S_2}{S_1} m_1 - \frac{S_2 S}{S_1} l \varrho_1 < m_2 < \frac{S_2}{S_1} m_1 + S l \varrho_2\,.$$

2 body

b) Pro hmotnosti kapalin a hydrostatický tlak ve spojovací trubici platí:

$$m_1 = S_1 h_1 \varrho_1 + S x \varrho_1\,, \quad m_2 = S_2 h_2 \varrho_2 + S(l - x)\varrho_2\,, \quad h_1 \varrho_1 g = h_2 \varrho_2 g\,.$$

Po vyloučení h_1, h_2:

$$x = \frac{S_2 m_1 - S_1 m_2 + S S_1 l \varrho_2}{S S_2 \varrho_1 + S S_1 \varrho_2}\,.$$

2 body

c) Předmět bude v levé nádobě plavat. Hmotnost první kapaliny, která by vyplnila ponořenou část tělesa je podle Archimédova zákona m; proto je situace v levé nádobě stejná, jako kdybychom zvětšili hmotnost m_1 na $m_1 + m$.

V pravé nádobě se předmět potopí. Objem druhé kapaliny s ponořeným tělesem bude $m_2/\varrho_2 + m/\varrho$. Situace v pravé nádobě je stejná, jako kdyby hmotnost druhé kapaliny vzrostla z m_2 na $m_2 + \dfrac{m}{\varrho}\varrho_2$. Před vhozením předmětů platí

$$\frac{l}{2} = \frac{S_2 m_1 - S_1 m_2 + S S_1 l \varrho_2}{S S_2 \varrho_1 + S S_1 \varrho_2},$$

po vhození předmětů

$$x = \frac{l}{2} + \frac{S_2 m - S_1 \varrho_2 \dfrac{m}{\varrho}}{S S_2 \varrho_1 + S S_1 \varrho_2},$$

Protože $x \in \langle 0\,,\, l \rangle$, musí pro hmotnost předmětů platit:

$$m \leq \frac{l S \varrho}{2} \cdot \frac{S_2 \varrho_1 + S_1 \varrho_2}{S_2 \varrho - S_1 \varrho_2}, \quad \text{je-li} \quad S_2 \varrho > S_1 \varrho_2$$

nebo

$$m \leq \frac{l S \varrho}{2} \cdot \frac{S_2 \varrho_1 + S_1 \varrho_2}{S_1 \varrho_2 - S_1 \varrho}, \quad \text{je-li} \quad S_2 \varrho < S_1 \varrho_2 .$$

Je-li $S_2 \varrho = S_1 \varrho_2$, může být m libovolné, protože poloha rozhraní se nemění.

3 body

d) Pro dané hodnoty určíme nejprve výšky hladin před vhozením předmětů:

$$\left(h_1 S_1 + S \frac{l}{2} \right) \varrho_1 = m_1 \qquad h_1 = \frac{\dfrac{m_1}{\varrho_1} - S \dfrac{l}{2}}{S_1} = 0{,}500 \text{ m},$$

$$h_2 = h_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 0{,}625 \text{ m}.$$

Po vhození předmětů platí:

$$x = 53{,}96 \text{ m}, \qquad h_1^{'} = h_1 + \frac{m}{\varrho_1 S_1} - \left(x - \frac{l}{2} \right) \frac{S}{S_1} = 0{,}560 \text{ m},$$

$$h_2^{'} = h_2 + \frac{m}{\varrho S_2} + \left(x - \frac{l}{2} \right) \frac{S}{S_2} = 0{,}700 \text{ m}.$$

3 body

4. a) Vyjdeme ze vztahů:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \qquad p_2 V_1^{\kappa} = p_1 V_3^{\kappa}, \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3}.$$

Úpravou dostaneme:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}\,, \qquad V_3 = V_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\,, \qquad T_3 = T_1 \frac{V_3}{V_1} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\,.$$

Pro dané hodnoty: $T_2 = 900\ \mathrm{K}\,,\ T_3 = 657\ \mathrm{K}\,,\ V_3 = 2{,}63 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\,.$ **3 body**

b) Celková práce vykonaná během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané při adiabatické expanzi a práce spotřebované při izobarické kompresi: $W^{'} = W_{23}^{'} - W_{31}\,.$
Práce vykonaná plynem při adiabatické expanzi je rovna úbytku vnitřní energie plynu:

$$W_{23}^{'} = U_2 - U_3 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_3) = \frac{5}{2} nRT_1 \left[\frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right] =$$

$$= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left[\frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right]\,.$$

Práci spotřebovanou plynem při izobarické kompresi určíme z p-V diagramu:

$$W_{31} = p_1(V_3 - V_1) = p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]\,.$$

$$W^{'} = p_1 V_1 \left[\frac{5}{2}\frac{p_2}{p_1} - \frac{7}{2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} + 1\right]\,.$$

Pro dané hodnoty: $W^{'} = 99{,}4\ \mathrm{J}\,.$ **3 body**

c) Účinnost motoru určíme jako poměr celkové práce vykonané při jednom pracovním cyklu a tepla přijatého plynem při izochorickém ohřátí:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(p_2 V_1 - p_1 V_1) = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\,.$$

$$\eta = \frac{W^{'}}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2}\frac{p_2}{p_1} - \frac{7}{2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} + 1}{\frac{5}{2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}\,.$$

Pro dané hodnoty: $Q_{12} = 600\ \mathrm{J}\,,\ \eta = 16{,}6\ \%$. Účinnost Carnotova cyklu, který by probíhal mezi teplotami T_2 a T_1 by měla hodnotu

$$\eta_c = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{p_1}{p_2} = 66{,}7\ \%\,.$$

Byla by tedy přibližně čtyřikrát větší než účinnost daného cyklu. **4 body**

5. a) Z deformace pružiny po zavěšení misky určíme tuhost pružiny $k = \dfrac{m_1 g}{\Delta l}$.

Kulička z plastelíny dopadne na misku z výšky h rychlostí o velikosti

$$v = \sqrt{2hg}\,.$$

Dopad kuličky můžeme považovat za nepružný ráz, po kterém miska i s kuličkou získají počáteční rychlost o souřadnici

$$v_0 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

a začnou kmitat s úhlovou frekvencí a periodou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\Delta l (m_1 + m_2)}}\,, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{m_1 g}}$$

okolo nové rovnovážné polohy. V této rovnovážné poloze je síla pružiny v rovnováze s tíhou misky se závažím a pružina je deformována o

$$\Delta l' = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} = \frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{m_1}\,.$$

Vzdálenost rovnovážných poloh nezatížené a zatížené misky určuje počáteční výchylku misky

$$y_0 = \Delta l' - \Delta l = \frac{m_2 \Delta l}{m_1}\,.$$

3 body

Časové průběhy okamžité výchylky a rychlosti kmitů jsou popsány rovnicemi

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad v = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

V čase $t = 0$ platí

$$y_m \sin\varphi_0 = y_0 = \frac{m_2 \Delta l}{m_1}\,, \qquad y_m \cos\varphi_0 = \frac{v_0}{\omega} = -\frac{m_2\sqrt{2h\Delta l}}{\sqrt{m_1(m_1 + m_2)}}\,.$$

Řešením této soustavy dostaneme

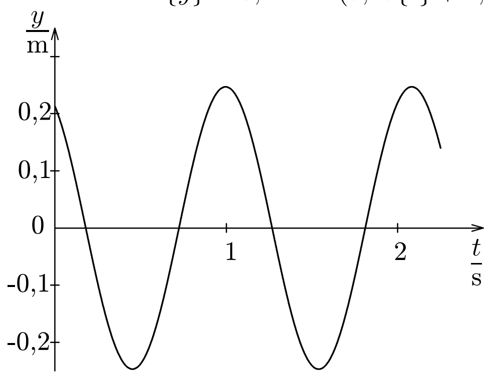
$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega y_0}{v_0} = -\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{2hm_1}}\,,$$

$$y_m = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{m_2^2 (\Delta l)^2}{m_1^2} + \frac{2m_2^2 h \Delta l}{m_1(m_1 + m_2)}}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\mathrm{tg}\,\varphi_0 = -1{,}713\,,\ \varphi_0 = 120{,}3° = 2{,}10\ \mathrm{rad}\,,\ y_m = 0{,}247\ \mathrm{m}\,,$
$\omega = 5{,}78\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,,\ T = 1{,}09\ \mathrm{s}\,,\ v_0 = -0{,}72\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$ **4 body**

b) Časový diagram okamžité výchylky na obr. RB-4 je popsán rovnicí

$$\{y\} = 0{,}247\sin(5{,}78\{t\} + 2{,}10)\,.$$



Obr. RB-4

3 body

7. a) Dosáhne-li lyžař maximální rychlosti v_m, je pohybová složka tíhové síly v rovnováze s odporem vzduchu a smykovým třením mezi lyžemi a sněhem. Pro úhly α_1 a α_2 dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} mg\sin\alpha_1 &= mgf\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}CS\rho v_{m1}^2\,,\\ mg\sin\alpha_2 &= mgf\cos\alpha_2 + \frac{1}{2}CS\rho v_{m2}^2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

ze které vyjádříme

$$C = \frac{2mg(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2)}{S\rho(v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2)} = \frac{2mg\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{S\rho(v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2)}\,.$$

Pro dané hodnoty $C = 0,42\,.$ **4 body**

b) Řešením soustavy (1) dále dostaneme

$$f = \frac{v_{m2}^2\sin\alpha_1 - v_{m1}^2\sin\alpha_2}{v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2}\,.$$

Pro dané hodnoty $f = 0,12\,.$ **3 body**

c) Maximální rychlost lyžaře na svahu se sklonem α_3 určíme ze vztahu

$$v_{m3} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}(\sin\alpha_3 - f\cos\alpha_3)}\,.$$

Po dosazení $v_{m3} = 46\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$ **3 body**

Autoři úloh: M. Randa (1, 2), K. Rauner (3), P. Šedivý (4, 6, 7), I. Volf (5)