Řešení úloh celostátního kola 37. ročníku FO

1. a) Na zvedanou tyč působí tři síly: v bodě B tahová síla lanka $\boldsymbol{F}$, v těžišti T tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a v bodě A reakce podlahy $\boldsymbol{R}$. Tyto síly jsou v rovnováze a jejich vektorové přímky proto procházejí jediným bodem S, který je středem úsečky BC (obr. R1). Odchylku β reakce $\boldsymbol{R}$ od svislého směru určíme pomocí vztahu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{\frac{l}{2}\cos\alpha}{\frac{h}{2}+\frac{l}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{h}{l\cos\alpha}}\,,$$

kde α je odchylka tyče od podlahy. Nemá-li konec tyče sklouznout, musí platit

$$R_x < f\cdot R_y \quad\Rightarrow\quad f > \frac{R_x}{R_y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{h}{l\cos\alpha}}\,.$$

Výraz ve jmenovateli je klesající funkcí úhlu α v celém intervalu $0 \leq \alpha \leq 90°$. Zlomek má tedy největší hodnotu pro $\alpha = 0$. Z toho pro součinitel tření plyne

$$f > \frac{l}{h}\,, \qquad \text{pro dané hodnoty} \quad f > 0{,}75\,.$$

3 body

b) Velikost tažné síly lanka určíme z momentové věty:

$$Fv_a = F_G\frac{v_b}{2}\,, \qquad F = F_G\frac{v_b}{2v_a} = F_G\frac{c}{2h}\,,$$

kde $v_a,\ v_b$ jsou výšky v trojúhelníku ABC příslušné k stranám c a h. Dale platí

$$c = c_0 - s = \sqrt{l^2+h^2} - s\,,$$

kde c_0 je počáteční vzdálenost bodů B, C a s dráha, o kterou se posunul konec lanka. Velikost síly $\boldsymbol{F}$ tedy v závislosti na dráze s lineárně klesá podle vztahu

$$F = F_G\frac{c_0 - s}{2h}\,, \qquad 0 < s < c_0 - (h-l)\,.$$

Počáteční hodnota je $F_0 = F_G\dfrac{c_0}{2h}$ a konečná $F_\mathrm{k} = F_G\dfrac{h-l}{2h}$.

Pro dané hodnoty $c_0 = 5{,}0$ m, $c_0-(h-l) = 4{,}0$ m, $F_G = 200$ N, $F_0 = 125$ N, $F_\mathrm{k} = 25$ N. Graf síly je na obr. R2.

4 body

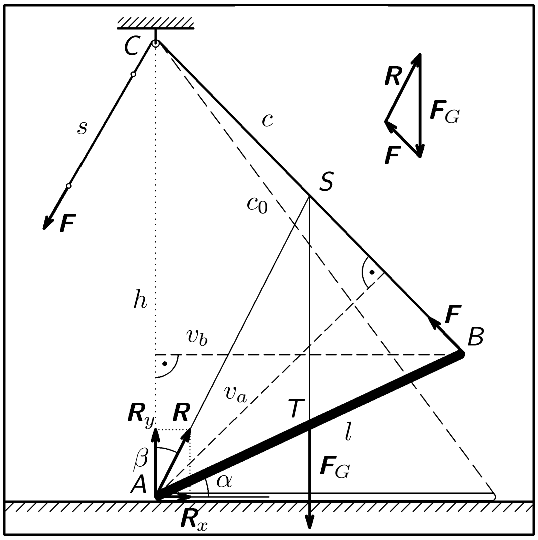
c) Práce vykonaná tažnou silou je číselně rovna obsahu lichoběžníka omezeného grafem síly. Platí

$$W = (F_0+F_\mathrm{k})\frac{c_0-(h-l)}{2} = mg\frac{c_0+(h-l)}{2h}\cdot\frac{c_0-(h-l)}{2} =$$

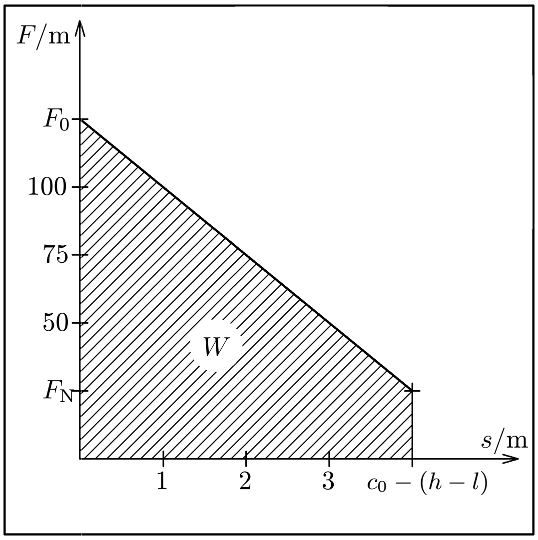
$$= \frac{mg}{4h}\left[c_0^2 - (h-l)^2\right] = \frac{mg}{4h}(h^2 + l^2 - h^2 + 2hl - l^2) = mg\frac{l}{2}\,.$$

Dospěli jsme k výrazu, který vyjadřuje potenciální energii postavené tyče. Pro dané hodnoty $W = 300$ J.

3 body



Obr. R1



Obr. R2

2.a) Pro velikost v_1 rychlosti kuličky při dopadu na stěnu a velikost v_2 rychlosti kuličky těsně po odrazu odvodíme ze zákona zachování mechanické energie vztahy

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgl(1-\cos\alpha)\,, \qquad \frac{1}{2}mv_2^2 = mgl(1-\cos\beta)\,.$$

Z toho určíme koeficient restituce

$$K = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}} = 0{,}26\,.$$

2 body

b) Při druhém pokusu je tíhová síla působící na kuličku prakticky kompenzována silou vlákna a mezi jednotlivými nárazy se uplatňuje jen konstantní elektrostatická síla $F = QE$, která kuličce uděluje konstantní zrychlení o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{QU}{md}\,.$$

2 body

Pohyb mezi dvěma po sobě následujícími odrazy je rovnoměrně zrychlený. Během relativně krátkého odrazu od desky se mění pohybový stav kuličky především působením sil pružnosti podobně jako při prvním pokusu. Pro velikost v rychlosti před dopadem na desku a velikost v_0 rychlosti těsně po odrazu platí:

$$(v+v_0) = \frac{2d}{T}\,, \qquad \frac{v_0}{v} = K\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$v = \frac{2d}{T(1+K)}\,, \qquad v_0 = \frac{2dK}{T(1+K)}\,, \qquad a = \frac{v-v_0}{T} = \frac{2d(1-K)}{T^2(1+K)}\,.$$

Pro dané hodnoty $v_0 = 0{,}046\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v = 0{,}176\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $(a = 0{,}29\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})$.

4 body

c) Náboj, který nese kulička mezi dvěma nárazy, je střídavě kladný a záporný. Jeho absolutní hodnota je

$$Q = \frac{F}{E} = \frac{mad}{U} = \frac{2md^2(1-K)}{UT^2(1+K)} = 2{,}2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\,.$$

2 body

3. a) Impedance samotné reálné cívky je $\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$ a impedance sériového spojení reálné cívky s rezistorem o odporu R_1 je $\boldsymbol{Z}_1 = R + R_1 + \mathrm{j}\omega L$. Platí:

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2 = \left(\frac{U}{I}\right)^2 , \qquad Z_1^2 = (R + R_1)^2 + \omega^2 L^2 = \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 .$$

Po odečtení obou rovnic a dalších úpravách dostaneme:

$$Z_2^2 - Z_1^2 = 2RR_1 + R_1^2 ,$$

$$R = \frac{Z_2^2 - Z_1^2 - R_1^2}{2R_1} = \frac{1}{2R_1}\left[\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2 - R_1^2\right] ,$$

$$L = \frac{\sqrt{Z_1^2 - R^2}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} .$$

3 body

Pro dané hodnoty: $R = 113{,}5\ \Omega \doteq 110\ \Omega$, $L = 1{,}96\ \mathrm{H} \doteq 2{,}0\ \mathrm{H}$. **1 bod**

b) Poměr fázoru napětí na kondenzátoru a fázoru celkového napětí je stejný jako poměr impedance kondenzátoru a celkové impedance:

$$\frac{\boldsymbol{U}_C}{\boldsymbol{U}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC + 1} ,$$

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

Amplituda napětí na kondenzátoru je

$$U_{C\mathrm{m}} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

2 body

Extrém nastane, jestliže

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}\left[(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2\right] = 2\omega^2(\omega^2 L^2 C - L + R^2 C) = 0 .$$

Z toho:

$$C_\mathrm{k} = \frac{L}{\omega^2 L^2 + R^2} .$$

2 body

Pro $C < C_\mathrm{k}$ je derivace záporná a pro $C > C_\mathrm{k}$ je derivace kladná. Výraz pod odmocnítkem tedy pro $C = C_\mathrm{k}$ dosahuje minima a amplituda napětí na kondenzátoru maxima

$$U_{C\mathrm{mk}} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)^2 + \dfrac{\omega^2 R^2 L^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}}} =$$

$$= U\sqrt{2} \cdot \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}} = U\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}\,.$$

1 bod

Pro dané hodnoty: $C_\mathrm{k} = 5{,}0\ \mu\mathrm{F}$, $U_{C\mathrm{mk}} = 78\ \mathrm{V}$. **1 bod**

Poznámka: Případ vyšetřovaný v úloze b) se liší od *sériové rezonance*, při které platí *Thomsonův vztah* a obvodem prochází maximální proud. V tomto případě

$$C_\mathrm{r} = \frac{1}{\omega^2 L}\,, \quad Z_\mathrm{r} = R\,, \quad U_{C\mathrm{mr}} = \frac{U\sqrt{2}}{R\omega C} = \frac{U\omega L\sqrt{2}}{R}\,,$$

pro dané hodnoty: $C = 5{,}17\ \mu\mathrm{F}$, $U_{C\mathrm{m}} = 77\ \mathrm{V}$. Pokud řešitel uvede sériovou rezonanci jako řešení úlohy b), hodnotí se řešení úlohy b) nejvýše čtyřmi body.

4. a) Úpravou vztahu pro celkovou energii částice

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dostaneme pro $m_0 c^2 \ll E$:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2} \doteq c\left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{2E^2}\right) = c - \frac{m_0^2 c^5}{2E^2}\,.$$

Pro dané hodnoty je rychlost protonu $v_p = c - 197\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, rychlost elektronu $v_e = c - 4{,}4\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

2 body

b) Dostředivé zrychlení uděluje částici magnetická síla. Při rychlosti, která je prakticky stejná jako rychlost světla ve vakuu, platí:

$$Bec = \frac{mc^2}{r} = \frac{E}{r}\,, \qquad B = \frac{E}{ecr}\,.$$

Magnetická indukce v protonovém prstenci má hodnotu $B = 2{,}7\ \mathrm{T}$ (kterou můžeme získat jen supravodivým vinutím chlazeným kapalným heliem). V elektronovém prstenci je $B = 0{,}10\ \mathrm{T}$.

2 body

c) Laboratoř se pohybuje rychlostí o velikosti v_p vzhledem k vztažné soustavě spojené s protonem. Elektron se vzhleden k vztažné soustavě spojené laboratoří pohybuje stejným směrem rychlostí o velikosti v_e. Rychlost u elektronu vzhledem k soustavě spojené s protonem určíme pomocí relativistického vztahu

$$u = \frac{v_\mathrm{p} + v_\mathrm{e}}{1 + \frac{v_\mathrm{p} \cdot v_\mathrm{e}}{c^2}} \doteq c \cdot \frac{1 - \frac{X}{2} + 1 - \frac{Y}{2}}{1 + \left(1 - \frac{X}{2}\right)\left(1 - \frac{Y}{2}\right)}\,,$$

kde

$$X = \frac{m_{\mathrm{p}0}^2 c^4}{E_\mathrm{p}^2}\,, \quad Y = \frac{m_{\mathrm{e}0}^2 c^4}{E_\mathrm{e}^2}\,.$$

Po úpravě

$$u \doteq c \cdot \frac{2 - \frac{X+Y}{2}}{2 - \frac{X+Y}{2} + \frac{XY}{4}} = c \cdot \frac{1 - \frac{X+Y}{4}}{1 - \frac{X+Y}{4} + \frac{XY}{8}} \doteq c\left(1 - \frac{XY}{8}\right)\,,$$

$$u = c\left(1 - \frac{m_{\mathrm{p0}}^2 m_{\mathrm{e0}}^2 c^4}{8E_\mathrm{p}^2 E_\mathrm{e}^2}\right) .$$

Pro dané hodnoty $u = c - 1{,}43 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **3 body**

Při této rychlosti má elektron hmotnost

$$m'_\mathrm{e} = \frac{m_{\mathrm{e0}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_{\mathrm{e0}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{XY}{8}\right)^2}} \doteq \frac{m_{\mathrm{e0}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{XY}{4}\right)}} = \frac{2m_{\mathrm{e0}}}{\sqrt{XY}} ,$$

$$m'_\mathrm{e} = \frac{m_{\mathrm{e0}}}{\frac{m_{\mathrm{e0}} m_{\mathrm{p0}} c^4}{E_\mathrm{p} E_\mathrm{e}}} = \frac{2E_\mathrm{p} E_\mathrm{e}}{m_{\mathrm{p0}} c^4}$$

a celkovou energii

$$E'_\mathrm{e} = m'_\mathrm{e} c^2 = \frac{2E_\mathrm{p} E_\mathrm{e}}{m_{\mathrm{p0}} c^2} .$$

Po dosazení $m'_\mathrm{e} = 9{,}3 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{kg}$, $E'_\mathrm{e} = 8{,}4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} = 52\,000\ \mathrm{GeV}$. **3 body**

Autor úloh: P. Šedivý