Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie A

1. a) V krátkém časovém úseku můžeme valivý pohyb kotoučů bez klouzání popsat jako otáčivý pohyb okolo okamžité osy, která se nachází v místě dotyku kotoučů s podložkou. Mezi rychlostí pohybu těžiště tělesa a úhlovou rychlostí otáčivého pohybu platí vztah $v = R\omega$. Podobně mezi zrychlením posuvného pohybu a úhlovým zrychlením otáčivého pohybu platí vztah $a = R\varepsilon$. Z pohybové rovnice

$$M = F(R+r) = (J + mR^2)\varepsilon = (J + mR^2)\frac{a}{R}$$

vyjádříme

$$a = \frac{FR(R+r)}{mR^2 + J}\,.$$

2 body

b) Rychlost konce lanka v' je stejná jako okamžitá rychlost nejvyššího bodu hřídele. Platí

$$v' = \omega(R+r) = v\frac{R+r}{R}\,, \quad a' = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = \frac{R+r}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R+r}{R}a\,.$$

2 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $a = 1{,}76\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $a' = 2{,}06\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1 bod

c) Předpokládejme, že smykové tření $\boldsymbol{F}_t$ má opačný směr než síla $\boldsymbol{F}$ působící na lanko. Z pohybové rovnice

$$F - F_t = ma$$

dostaneme:

$$F_t = F - ma = F - \frac{mFR(R+r)}{mR^2 + J} = F\frac{J - mRr}{J + mR^2}\,.$$

2 body

Mohou nastat 3 případy:

1. $J > mRr \;\Rightarrow\; F_t > 0$ … Smykové tření má předpokládaný směr – opačný než síla $\boldsymbol{F}$.
2. $J = mRr \;\Rightarrow\; F_t = 0$ … V tomto případě smykové tření nevzniká.
3. $J < mRr \;\Rightarrow\; F_t < 0$ … Smykové tření má stejný směr jako síla $\boldsymbol{F}$.

K prokluzování kotoučů nedojde, pokud $|F_t| < f \cdot mg$. Ve druhém případě nedojde k prokluzování kotouče při libovolně velké tažné síle $\boldsymbol{F}$. V prvním a třetím případě nedojde k prokluzování kotouče, jestliže

$$F < \frac{J + mR^2}{|J - mRr|} \cdot fmg = F_0 \,.$$

2 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $F_0 = 21{,}6$ N ... k prokluzování nedojde.

1 bod

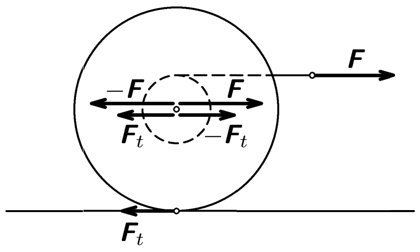
Jiné řešení:

Valivý pohyb bez klouzání můžeme popsat jako pohyb složený z posuvného pohybu určeného přímočarým pohybem těžiště a z otáčivého pohybu okolo osy procházející těžištěm. Předpokládejme, že v místě dotyku kotoučů s podložkou působí smykové tření $\boldsymbol{F}_t$ ve směru vyznačeném na obr. 1. Doplníme-li nákres o síly $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_t$ a $-\boldsymbol{F}_t$ působící v těžišti, dynamická situace se nezmění. Vidíme, že působení síly lanka a smykového tření můžeme nahradit působením síly o velikosti $F - F_t$ v těžišti a dvěma dvojicemi sil, jejichž celkový moment má velikost $Fr + F_tR$. Řešením pohybových rovnic

$$F - F_t = ma \,, \qquad Fr + F_tR = J\varepsilon = J\frac{a}{R}$$

dojdeme ke vztahům

$$a = \frac{FR(R + r)}{mR^2 + J} \,, \qquad F_t = F\frac{J - mRr}{J + mR^2} \,.$$



obr. 1

2. a) Z pozorovaného bodu A astronomického objektu přicházejí do objektivu rovnoběžné paprsky, které by objektiv soustředil do bodu A' v obrazové ohniskové rovině. Díváme-li se do dalekohledu neakomodovaným okem, musejí paprsky vystupovat z okuláru rovnoběžně. Toho dosáhneme, bude-li předmětová ohnisková rovina okuláru splývat s obrazovou ohniskovou rovinou objektivu (obr. 2.a). Z obrázku odvodíme vztah pro výpočet úhlového zvětšení:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg}\tau'}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{\dfrac{m}{|f_2|}}{\dfrac{m}{f1}} = \frac{f_1}{|f_2|}\,.$$

Pro dané hodnoty $\gamma = 10\,.$

3 body

b) Z bodu A ležícího ve vzdálenosti a od dalekohledu přicházejí do objektivu rozbíhavé paprsky, které by objektiv soustředil do bodu A' ve vzdálenosti a'. Určíme ji užitím čočkové rovnice:

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1}\,.$$

Díváme-li se do dalekohledu neakomodovaným okem, musejí paprsky opět vystupovat z okuláru rovnoběžně. Toho dosáhneme, bude-li předmětová ohnisková rovina okuláru ležet ve vzdálenosti a' od objektivu (obr. 2.b). Z obrázku odvodíme vztah pro výpočet úhlového zvětšení:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg}\tau'}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{\dfrac{m}{|f_2|}}{\dfrac{m}{a'}} = \frac{a'}{|f_2|} = \frac{af_1}{|f_2|(a - f_1)}\,.$$

Pro dané hodnoty $\gamma = 10{,}2\,.$

4 body

c) V případě a) je vzdálenost d_0 objektivu a okuláru rovna rozdílu absolutních hodnot jejich ohniskových vzdáleností:

$$d_0 = f_1 - |f_2|\,.$$

V případě b) je vzdálenost objektivu a okuláru

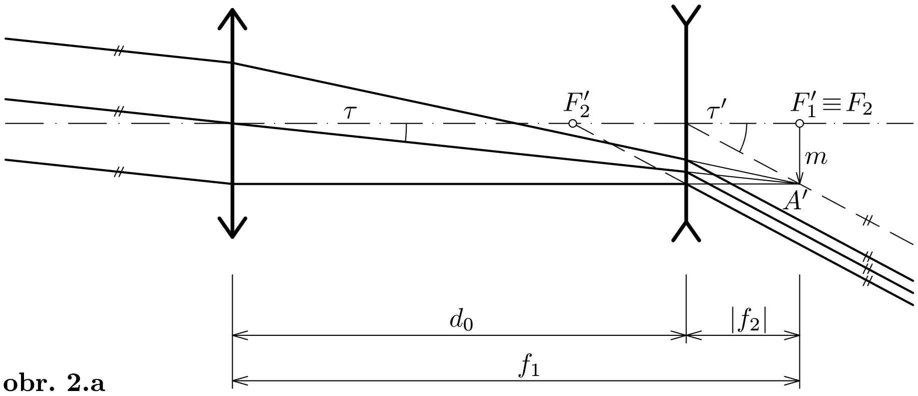
$$d = a' - |f_2|\,.$$

Rozdíl obou vzdáleností je

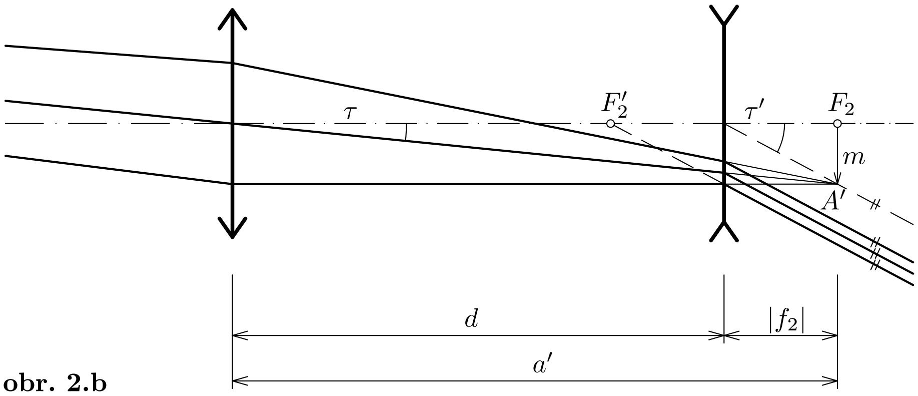
$$\Delta d = d - d_0 = a' - f_1 = \frac{af_1}{a - f_1} - f_1 = \frac{f_1^2}{a - f_1}\,.$$

Pro dané hodnoty $d = 0{,}275$ m, $\Delta d = 0{,}0046$ m. Okulár musíme vzdálit od objektivu o 4,6 mm.

3 body



obr. 2.a



obr. 2.b

3. a) Vstupní napětí se na děliči rozdělí v poměru impedancí. Napěťový přenos děliče je

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2} = \frac{\dfrac{\dfrac{2R}{2\mathrm{j}\omega C}}{2R + \dfrac{1}{2\mathrm{j}\omega C}}}{\dfrac{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \dfrac{\dfrac{2R}{2\mathrm{j}\omega C}}{2R + \dfrac{1}{2\mathrm{j}\omega C}}} = \frac{\dfrac{2R}{4\mathrm{j}\omega RC + 1}}{\dfrac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC} + \dfrac{2R}{1 + 4\mathrm{j}\omega RC}} =$$

$$= \frac{2 + 2\mathrm{j}\omega RC}{3 + 6\mathrm{j}\omega RC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \mathrm{j}\omega RC}{1 + 2\mathrm{j}\omega RC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 2\omega^2 R^2 C^2 - \mathrm{j}\omega RC}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}\,.$$

Absolutní hodnotu napěťového přenosu a fázové posunutí určují vztahy:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega RC}{1 + 2\omega^2 R^2 C^2}\,.$$

Fázové posunutí je záporné – výstupní napětí je opožděno za vstupním.

2 body

b) Extrém nastane, jestliže

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\varphi)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{-RC(1 + 2\omega^2 R^2 C^2) + \omega RC \cdot 4R^2 C^2}{(1 + 2\omega RC)^2} = \frac{RC(2\omega^2 R^2 C^2 - 1)}{(1 + 2\omega RC)^2} = 0\,.$$

Tomu odpovídá úhlová frekvence

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}\,,$$

pro kterou úhel φ dosahuje minima, neboť pro $\omega > \omega_1$ je derivace kladná a pro $\omega < \omega_1$ je derivace záporná.

2 body

Po dosazení $\omega_1 = 707\ \mathrm{s}^{-1}$, $f_1 = 113\ \mathrm{Hz}$.
Při této frekvenci je

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{2}}}{\sqrt{1 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}47\,,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 0{,}354\,, \quad \varphi = -19{,}5^\circ \doteq -0{,}340\ \mathrm{rad}\,.$$

2 body

c) Vztahy pro výpočet absolutní hodnoty napěťového přenosu a fázového posunutí můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{2\omega_1^2}}}{\sqrt{1 + 2\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \dfrac{f^2}{2f_1^2}}}{\sqrt{1 + 2\dfrac{f^2}{f_1^2}}}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dfrac{\omega}{\omega_1\sqrt{2}}}{1 + 2\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}} = -\frac{\dfrac{f}{f_1\sqrt{2}}}{1 + 2\dfrac{f^2}{f_1^2}}\,.$$

Při nízkých frekvencích ($f \ll f_1$) platí

$$A \to \frac{2}{3}\,, \qquad \varphi \to 0^\circ\,.$$

Při vysokých frekvencích ($f \gg f_1$) platí

$$A \to \frac{1}{3}\,, \qquad \varphi \to 0^\circ\,.$$

2 body

d) Vyměníme-li oba kondenzátory, změní se napěťový přenos na

$$\boldsymbol{A} = \frac{\dfrac{\dfrac{2R}{\mathrm{j}\omega C}}{2R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}{\dfrac{\dfrac{R}{2\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{2\mathrm{j}\omega C}} + \dfrac{\dfrac{2R}{\mathrm{j}\omega C}}{2R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}} = \frac{\dfrac{2R}{2\mathrm{j}\omega RC + 1}}{\dfrac{R}{1 + 2\mathrm{j}\omega RC} + \dfrac{2R}{1 + 2\mathrm{j}\omega RC}} = \frac{2}{3} = \text{konst.}$$

Dělič má stejný napěťový přenos, jako kdyby byl tvořen pouze rezistory o odporech R a $2R$. Absolutní hodnota napěťového přenosu a fázové posunutí mají hodnoty

$$A = \frac{2}{3}\,, \qquad \varphi = 0^\circ\,.$$

2 body

4. a) Počáteční tlak plynu p_0 souvisí s počátečním počet molekul N_0 podle stavové rovnice:

$$\frac{p_0 V}{T} = \frac{N_0}{N_\mathrm{A}} R_\mathrm{m} \,,$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a R_m molární plynová konstanta. **2 body**

Molekuly arsanu se rozkládají podle rovnice

$$2\ \mathsf{AsH_3} \rightarrow 2\ \mathsf{As} + 3\ \mathsf{H_2} \,.$$

Z každých dvou molekul arsanu vzniknou tedy tři molekuly vodíku. **2 body**

Počet dosud nerozložených molekul arsanu v čase t označíme N. Za malý časový interval $\mathrm{d}t$ se rozloží počet molekul, který je úměrný počtu dosud nerozložených molekul a délce intervalu. Označíme-li konstantu úměrnosti λ, bude

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t \,, \qquad \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t \,.$$

Znaménko minus vyjadřuje, že se počet molekul zmenšuje. Integrací dostaneme

$$\ln N = -\lambda t + C \,.$$

V čase $t = 0$ však byl počet molekul arsanu N_0, takže $C = \ln N_0$. Proto

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0 \,, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \,, \quad N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \,.$$

V čase t bude celkový počet molekul v nádobě

$$N_\mathrm{c} = N + \frac{3}{2}(N_0 - N) = \frac{N_0}{2}\left(3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \,.$$

Zbývá ještě určit konstantu λ. Podle zadání platí

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda \tau} \,, \quad \mathrm{e}^{-\lambda \tau} = \frac{1}{2} \,, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \,.$$

Pro tlak plynu ze stavové rovnice odvodíme:

$$p = \frac{N_\mathrm{c} R_\mathrm{m} T}{N_\mathrm{A} V} = \frac{N_0\left(3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) R_\mathrm{m} T}{2 N_\mathrm{A} V} = p_0 \frac{3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2} \,.$$

4 body

b) Po dlouhé době bude člen $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ zanedbatelný a tlak bude mít hodnotu

$$p = \frac{3}{2} p_0 \,.$$

2 body

Autoři úloh: V. Havel, V. Vícha, P. Šedivý a J. Blažek