ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie A

1. Situaci při zvedání trámu znázorňuje obr. RA-1. Na trám působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, vztlaková síla $\boldsymbol{F}_v$ a síla lana $\boldsymbol{F}$, které splňují podmínky rovnováhy. Protože tíhová síla působí svisle dolů a vztlaková síla působí svisle vzhůru, přemisťuje se trám ve vodě tak, že i síla lana působí stále svisle vzhůru. Platí:

$$F = F_G - F_v = \varrho l g S - \varrho_1 2xgS\,,$$

1 bod

kde x je vzdálenost těžiště ponořené části od konce a $2x$ je délka ponořené části trámu. Z momentové věty pro osu procházející těžištěm trámu dostaneme:

$$F\frac{l}{2}\cos\alpha = F_v\left(\frac{l}{2} - x\right)\cos\alpha\,, \qquad (F_G - F_v)\frac{l}{2} = F_v\left(\frac{l}{2} - x\right)\,,$$

$$(\varrho l - \varrho_1 2x)\frac{l}{2} = \varrho_1 2x\left(\frac{l}{2} - x\right)\,.$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$4\varrho_1 x^2 - 4\varrho_1 l x + \varrho l^2 = 0\,,$$

3 body

která má řešení

$$x = \frac{l\left(\varrho_1 \pm \sqrt{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho)}\right)}{2\varrho_1}\,.$$

Protože $x < l/2$, vyhovuje úloze kořen se znaménkem (-) a délka ponořené části má stálou velikost

$$2x = l\left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}}\right)\,.$$

Délka vynořené části je

$$l_1 = l - 2x = l\sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}}\,.$$

Lano působí konstantní silou

$$F_1 = F_G - \varrho_1 g S 2x = F_G\left[1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}}\right)\right]\,.$$

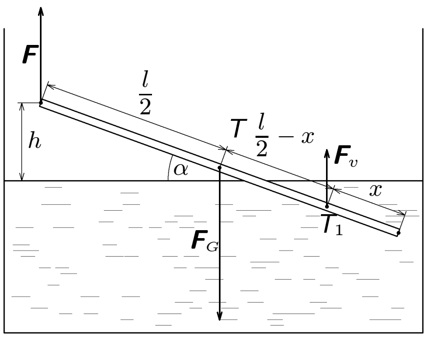
2 body

Odvozené vztahy přestanou platit, jakmile výška h zvedaného konce překročí hodnotu l_1 a trám zaujme svislou polohu. Od tohoto okamžiku se vztlaková síla rovnoměrně zmenšuje a pro $h = l$ je nulová. Síla lana dosáhne velikosti F_G a dále už neroste.

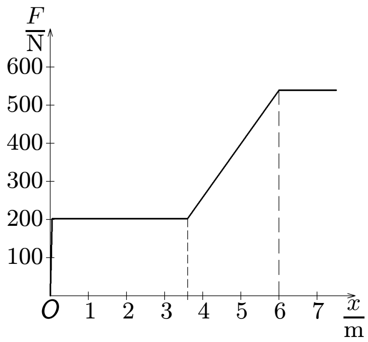
2 body

Pro dané hodnoty dostaneme: $l_1 = 0{,}60\,l = 3{,}6$ m, $F_G = 539$ N, $F_1 = 0{,}375\,F_G = 202$ N. Znalost těchto výsledků stačí k sestrojení grafu na obr. RA-2.

2 body



Obr. RA-1



Obr. RA-2

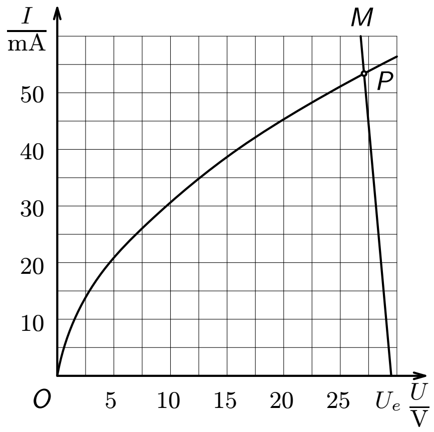
2.a) Voltampérová charakteristika žárovky je graf funkce $I = f(U)$ vyjadřující vztah mezi napětím na žárovce a proudem, který žárovkou prochází. V jednoduchém obvodu s jedinou žárovkou je napětí na žárovce současně svorkovým napětím zdroje, pro které platí

$$I = \frac{U_e - U}{R_i}\,.$$

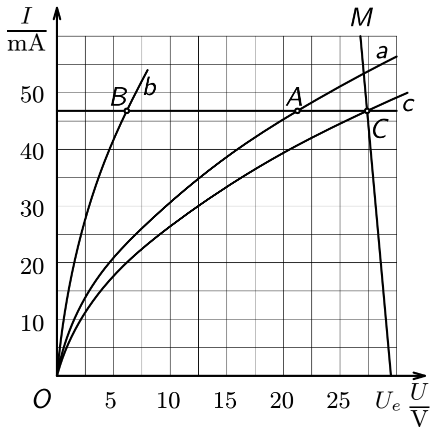
Také tento lineární vztah můžeme vyjádřit graficky jako tzv. *zatěžovací charakteristiku zdroje.* K sestrojení zatěžovací charakteristiky postačí znát elektromotorické napětí zdroje a svorkové napětí při některé hodnotě odebíraného proudu. Na obr. RA-3 byl použit bod M o souřadnicích $I = 60$ mA; $U = 29{,}5\ \mathrm{V} - 45\ \Omega \cdot 0{,}060\ \mathrm{A} = 26.8$ V.

Průsečík obou grafů P určuje řešení úlohy: $U = 27{,}1$ V, $I = 53.4$ mA

3 body



Obr. RA-3



Obr. RA-4

b) Dvěma paralelně spojenými žárovkami prochází dvakrát větší proud než jednou žárovkou. Tomu odpovídá na obr. RA-4 graf *b*.

2 body

c) Připojíme-li ke zdroji skupinu žárovek zapojenou podle obr. A-2, bude svorkové napětí zdroje U rovno součtu napětí U_1 na samostatné žárovce a napětí U_2 na žárovkách spojených paralelně. Tomu odpovídá na obr. RA-4 graf *c*.

2 body

d) Do společného obrázku s voltampérovými charakteristikami nakreslíme zatěžovací charakteristiku zdroje. Její průsečík *C* s grafem *c* určuje svorkové napětí zdroje a celkový proud v obvodu I.

Odečteme: $U = 27{,}4\ \mathrm{V}$, $I = 46{,}8\ \mathrm{mA}$.

Bodem *C* vedeme rovnoběžku s osou napětí a určíme její průsečík *B* s grafem *b*, který určuje napětí U_2 na paralelně spojených žárovkách a průsečík *A* s grafem *a*, který určuje napětí U_1 na zbývající žárovce.

Odečteme: $U_1 = 21{,}2\ \mathrm{V}$, $U_2 = 6{,}2\ \mathrm{V}$. Každou z paralelně zapojených žárovek prochází proud $I/2 = 23{,}2\ \mathrm{mA}$.

3 body

3.a) Osvětlení podlahy v bodě C od obou zdrojů se sčítají. Platí (obr. RA-5):

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I_1}{(h-x_1)^2} + \frac{I_2}{(h-x_2)^2 + l^2} \cdot \cos\alpha = \frac{I_1}{(h-x_1)^2} + \frac{I_2(h-x_2)}{\sqrt{[(h-x_2)^2+l^2]^3}}\,.$$

Pro $x_1 = x_2 = \dfrac{d-l}{2}$ dostaneme

$$E_0 = \frac{I_1}{\left(h - \dfrac{d-l}{2}\right)^2} + \frac{I_2\left(h - \dfrac{d-l}{2}\right)}{\sqrt{\left[\left(h-\dfrac{d-l}{2}\right)^2 + l^2\right]^3}}\,.$$

Pro dané hodnoty: $x_1 = x_2 = 1{,}15\ \mathrm{m}$, $E_0 = 30{,}9\ \mathrm{lx}$.

2 body

b) Stejné osvětlení vyvolá v bodě C zdroj Z_1, jestliže

$$E_0 = \frac{I_1}{(h-x_1)^2}\,, \qquad x_1 = h - \sqrt{\frac{I_1}{E_0}}\,.$$

Současně musí platit $x_1 \leq d - l$.
Pro dané hodnoty: $x_1 = 2{,}20\ \mathrm{m}$; $d - l = 2{,}3\ \mathrm{m}$, $x_1 < d - l$.

2 body

c) Samotný zdroj Z_2 vyvolá v bodě C osvětlení E_0, jestliže

$$E_0 = \frac{I_2(h-x_2)}{\sqrt{[(h-x_2)^2+l^2]^3}}\,, \qquad E_0^2\left[(h-x_2)^2 + l^2\right]^3 = I_2^2(h-x_2)^2\,.$$

Dostáváme rovnici šestého stupně, kterou můžeme řešit pomocí počítače např. nalezením průsečíku grafů funkcí

$$E = E_0\,, \qquad E = \frac{I_2(h-x_2)}{\sqrt{[(h-x_2)^2+l^2]^3}} \qquad \text{(obr. RA-6.)}\,.$$

Kořen musí současně splňovat podmínku $x \leq d - l$.
Pro dané hodnoty: $x_2 = 1{,}55\ \mathrm{m}$. (Další kořen $x_2 = 2{,}67\ \mathrm{m}$ již nevyhovuje podmínce $x_2 < d - l = 2{,}3\ \mathrm{m}$.)

3 body

d) Z obr. RA-6 můžeme také přibližně určit, pro jaké x_2 vyvolá druhý zdroj v bodě C maximální osvětlení. Přesnější polohu extrému určíme pomocí první derivace:

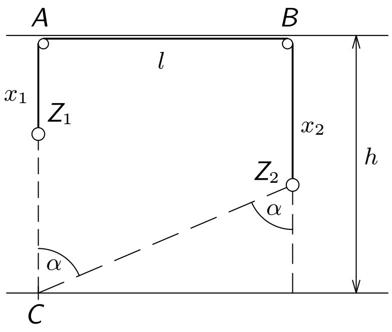
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x_2} =$$

$$= I_2 \cdot \frac{-\sqrt{[(h-x_2)^2+l^2]^3} - (l - x_2)\cdot\dfrac{3}{2}\left[(h-x_2)^2+l^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot(h-x_2)\cdot(-1)}{\left[(h-x_2)^2+l^2\right]^3} = 0\,,$$

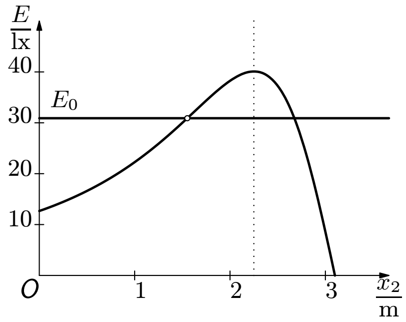
Řešením je

$$x_2 = h - \frac{l}{\sqrt{2}}\,.$$

Pro dané hodnoty: $x_2 = 2{,}25$ m. Tento kořen splňuje podmínku. **3 body**



Obr. RA-5



Obr. RA-6

4. Při ohřívání vzduchu v místnosti se jeho tlak neustále vyrovnává s venkovním atmosférickým tlakem. Jedná se tedy o děj izobarický. Dodané teplo můžeme rozdělit na část Q_1 potřebnou k ohřátí vzduchu, který zůstane v místnosti, a na část Q_2, kterou odnese vzduch postupně unikající do vnějšího prostoru.

Výpočet tepla Q_1:
Hmotnost vzduchu, který zbyl ve třídě po dosažení požadované teploty T_1, určíme pomocí stavové rovnice:

$$pV = \frac{m}{M_m} RT_1 \qquad m = \frac{M_m pV}{RT_1}\,.$$

1 bod

K jeho ohřátí se spotřebovalo teplo

$$Q_1 = mc_p \Delta T = \frac{pVM_m c_p \Delta T}{RT_1}\,.$$

2 body

Pro dané hodnoty: $Q_1 = 6{,}76$ MJ. **1 bod**

Výpočet tepla Q_2:
Při ohřátí vzduchu o $\mathrm{d}T$ se jeho objem zvětší o $\mathrm{d}V = V\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$. Tento přírůstek objemu unikne z místnosti. Na jeho ohřátí se spotřebovalo teplo

$$\mathrm{d}Q = \varrho\,\mathrm{d}V c_p (T - T_0)\,.$$

2 body

Hustotu ϱ vypočteme ze stavové rovnice:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT}\,.$$

1 bod

Po dosazení dostáváme:

$$\mathrm{d}Q = \frac{pVM_m c_p (T - T_0)\,\mathrm{d}T}{RT^2}\,.$$

Provedeme integraci:

$$Q_2 = \frac{pVM_m c_p}{R}\int\limits_{T_0}^{T_1}\left(\frac{1}{T} - \frac{T_0}{T^2}\right)\mathrm{d}T = \frac{pVM_m c_p}{R}\left(\ln\frac{T_1}{T_0} - \frac{\Delta T}{T_1}\right)\,.$$

2 body

Pro dané hodnoty: $Q_2 = 0{,}24\ \mathrm{MJ}$. Celkové množství tepla potřebné k ohřátí vzduchu ve třídě je $Q = Q_1 + Q_2 = 7{,}0\ \mathrm{MJ}$. **1 bod**

5. a) Označme F_{t1} třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou a F_{t2} třecí sílu mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Pro soustavu v klidu je $F_{t1} = 0$ (v opačném případě by na válec působil nenulový moment síly). Třecí síla F_{t2} je v rovnováze s pohybovými složkami tíhových sil, takže

$$F_{t2} = (m_1 + m_2) g \sin\alpha\,.$$

Soustava se udrží v klidu, pokud $F_{t2} \leq f m_2 g \cos\alpha$. V opačném případě, tj. pro

$$f < \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\operatorname{tg}\alpha = f_{max}$$

bude po nakloněné rovině sjíždět. Pro dané hodnoty: $f_{max} = 0{,}67$.

3 body

b) Vyjdeme z pohybových rovnic pro válec a kvádr ve tvaru

$$(m_1 g \sin\alpha - F) r = (J + m_1 r^2)\frac{a}{r}\,,$$

$$m_2 g \sin\alpha + F - f m_2 g \cos\alpha = m_2 a\,.$$

2 body

Jejich řešením je

$$a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2}} = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha}{\dfrac{3}{2}m_1 + m_2}\,,$$

$$F = m_2 g \frac{f\left(m_1 + \frac{J}{r^2}\right)\cos\alpha - \frac{J}{r^2}\sin\alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = m_1 m_2 g \frac{3f\cos\alpha - \sin\alpha}{3m_1 + 2m_2},$$

(Pro $F > 0$ je tyč namáhána tahem, pro $F < 0$ je namáhána tlakem.) Pro dané hodnoty: $a = 2{,}15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $F = 2{,}0\ \mathrm{N}$.

2 body

c) Třecí síla F_{t1} mezi válcem a nakloněnou rovinou uděluje válci úhlové zrychlení. Pokud se válec pohybuje bez prokluzování, platí

$$F_{t1} r = J\frac{a}{r}, \qquad F_{t1} \leq f m_1 g \cos\alpha .$$

Po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{Ja}{r^2} = \frac{Jg[(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha]}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + J} \leq f m_1 g \cos\alpha ,$$

$$J(m_1 + m_2)\sin\alpha - J f m_2 \cos\alpha \leq f m_1 (m_1 + m_2) r^2 \cos\alpha + J f m_1 \cos\alpha ,$$

$$f \geq \frac{J\sin\alpha}{m_1 r^2 \cos\alpha + J\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\frac{m_1 r^2}{J} + 1} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{3} = f_{min} .$$

Pro dané hodnoty: $f_{min} = 0{,}155$.

3 body

7. a) Děje v cyklotronu jsou na hranici platnosti klasické mechaniky. Na proton působí v magnetickém poli dostředivá síla o velikosti

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = Bev , \qquad m \doteq m_0 .$$

Z toho odvodíme

$$v = 2\pi r f_p = \frac{Be}{m_0}, \qquad f_p = \frac{Be}{2\pi m_0} = 22{,}9\ \mathrm{MHz} .$$

1 bod

b) Zvětšení hmotnosti vede k prodloužení doby oběhu a ke ztrátě synchronizace pohybu protonu se změnami elektrického pole. Při kinetické energii 15 MeV můžeme ještě s dostatečnou přesností použít klasický vzorec:

$$E_k \doteq \frac{1}{2} m_0 v^2 , \qquad v \doteq \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}} = 5{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0{,}18c ,$$

$$r = \frac{v}{2\pi f_p} = \frac{\sqrt{2 m_0 E_k}}{Be} = 0{,}373\ \mathrm{m} .$$

2 body

c) Hmotnost a rychlost protonu s kinetickou energií 400 MeV určíme podle relativistických vztahů:

$$m = m_0 + \frac{E_k}{c^2} = 2{,}38 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,;$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 0{,}71c = 2{,}1 \cdot 10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Z toho určíme poloměr trajektorie a frekvenci:

$$r = \frac{mv}{Be} = 2{,}42\ \mathrm{m}\,,$$

$$f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0\left(1 + \dfrac{E_k}{m_0c^2}\right)} = \frac{f_p}{1 + \dfrac{E_k}{m_0c^2}} = \frac{f_p}{1{,}43} = 16{,}0\ \mathrm{MHz}\,.$$

3 body

d) Vyjádřeme kinetickou energii protonu jako funkci frekvence:

$$1 + \frac{E_k}{m_0c^2} = \frac{f_p}{f}\,, \qquad E_k = m_0c^2\left(\frac{f_p}{f} - 1\right)\,.$$

Zderivováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = fE_1 = -m_0c^2 f_p \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\frac{E_1}{m_0c^2 f_p}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{f^3}\,\mathrm{d}f\,.$$

Z toho integrací dojdeme k hledaným vztahům:

$$\frac{E_1}{m_0c^2 f_p}\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{f_p}^{f} \frac{1}{f^3}\,\mathrm{d}f\,,$$

$$\frac{E_1}{m_0c^2 f_p}t = \frac{1}{2f^2} - \frac{1}{2f_p^2}\,, \qquad t = \frac{m_0c^2 f_p}{2E_1}\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f_p^2}\right) = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}\,.$$

Frekvence urychlovacího napětí se musí měnit v závislosti na čase podle vztahu:

$$f = \frac{f_p}{\sqrt{1 + \dfrac{2E_1 f_p}{m_0c^2}t}}\,.$$

4 body

Autoři úloh: J. Blažek (5), V. Havel (4), Z. Kluiber (7), P. Šedivý (1, 2 a 6), V. Vícha (3).