## Řešení úloh regionálního kola 36. ročníku FO, kategorie D

**1.** a) Pohyb chlapce byl nejprve po dobu $t_1$ rovnoměrně zrychlený se zrychlením $\boldsymbol{a}_1$ a nulovou počáteční rychlostí. V této části dosáhl rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ a projel dráhu $s_1$. Pak se pohyboval po dobu $t_2$ rovnoměrně rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ a projel dráhu $s_2$. V posledním úseku se jednalo o pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ a zrychlením $\boldsymbol{a}_2$ orientovaným proti směru pohybu.

Odporová síla $\boldsymbol{F}_o$ valivého odporu působila na kolo během celého pohybu. V prvním úseku musel chlapec šlapáním na pedály vyvinout sílu $\boldsymbol{F}_1$, přičemž $F_1 > \mathrm{F}_o$. V druhém úseku musel vyvinout sílu $\boldsymbol{F}_2$ stejně velkou jako odporová síla. Ve třetím úseku se dynamicky uplatnila pouze odporová síla.

**2 body**

b) Ve třetí části pohybu se velikost hybnosti cyklisty s kolem zmenšila z $mv_1$ na nulu. Z toho určíme velikost odporové síly:

$$F_o = \frac{mv_1}{t_3} = \frac{80\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{12\ \mathrm{s}} = 50\ \mathrm{N}\,.$$

**2 body**

c) Výkon chlapce v druhé části pohybu byl konstantní:

$$P_2 = F_2 v_1 = F_o v_1 = 50\ \mathrm{N} \cdot 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 375\ \mathrm{W}\,.$$

**1 bod**

d) V první části pohybu vyvinul chlapec stálou sílu o velikosti

$$F_1 = ma_1 + F_o = \frac{mv_1}{t_1} + F_o = \frac{80\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{8\ \mathrm{s}} + 50\ \mathrm{N} = 75\ \mathrm{N} + 50\ \mathrm{N} = 125\ \mathrm{N}\,.$$

Jeho rychlost se zvětšovala a s ní i okamžitý výkon. V čase $t_1$ dosáhl maximální hodnoty

$$P_{max} = F_1 v_1 = 125\ \mathrm{N} \cdot 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 940\ \mathrm{W}\,.$$

**2 body**

e) Celková dráha

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2 + \frac{v_1 t_3}{2} = 30\ \mathrm{ms^{-1}} + 112{,}5\ \mathrm{ms^{-1}} + 45\ \mathrm{ms^{-1}} \doteq 188\ \mathrm{m}\,.$$

**1 bod**

f) Celá mechanická práce vykonaná chlapcem v první a druhé části pohybu se spotřebovala působením třecí síly na celkové dráze $s$:

$$W_{celk} = F_1 s_1 + F_2 s_2 = F_o s \doteq 9400\ \mathrm{J}\,.$$

**2 body**

**2.** a) Pokud je odpor vzduchu zanedbatelný, platí pro volný pohyb míčku zákon zachování celkové mechanické energie. (Při odrazech, které nejsou dokonale pružné, se ovšem mechanická energie míčku zmenšuje.) Platí:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2\,, \quad mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2\,, \quad k^2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1}\,, \quad k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\,.$$

Číselně vychází $k = 0{,}85$.

**2 body**

b) Ponechme označení $v_1$ pro velikost rychlosti dopadu a $v_2$ pro velikost rychlosti odrazu. Podle zákona zachování energie platí:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2\,, \quad mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(kv_1)^2\,,$$

$$mgh = k^2\left(mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2\right) = \frac{h_2}{h_1}\left(mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2\right)\,,$$

$$h = k^2\left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right) = \frac{h_2}{h_1}\left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right)\,.$$

Číselně vychází $h = 1{,}49$ m.

**4 body**

c) Platí stejné vztahy jako v úloze b):

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2\,, \quad mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(kv_1)^2\,,$$

$$h = k^2\left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right) = \frac{h_2}{h_1}\left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right)\,.$$

Úpravou dostaneme:

$$v_0^2 = 2g\left(\frac{h}{k^2} - h_0\right) = 2g\left(\frac{hh_1}{h_2} - h_0\right)\,.$$

Číselně vychází $v_0 = 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**4 body**

**3.** a) Podle 3. Keplerova zákona

$$\left(\frac{r_M}{r_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2, \qquad r_M = r_Z \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^{\frac{2}{3}} = 227{,}9 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

$$v_M = \frac{2\pi r_M}{T_M} = 24{,}1\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

**3 body**

b) Z obr. D-1 odvodíme:

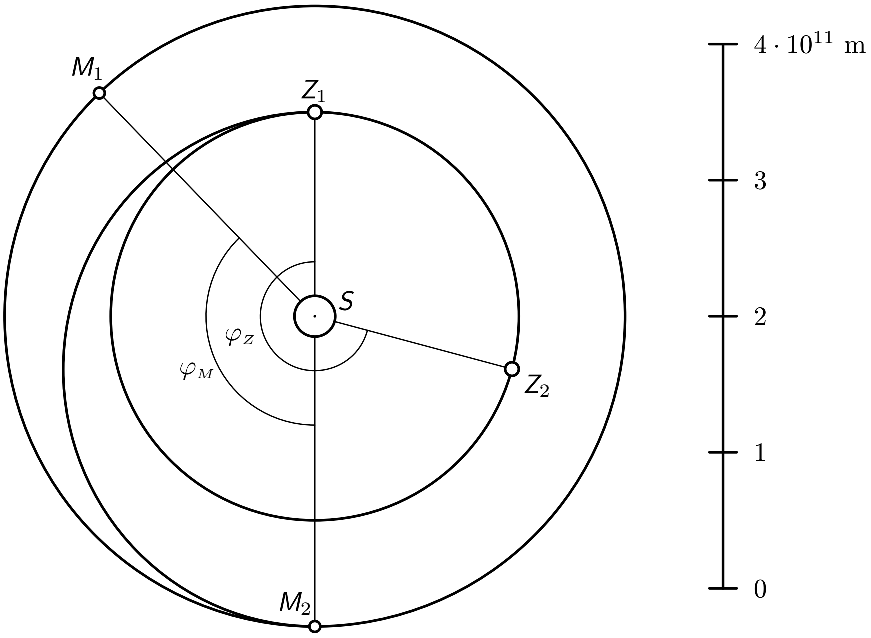
$$2a = r_Z + r_M\,, \qquad a = \frac{r_Z + r_M}{2} = 188{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

**1 bod**

c) Dobu letu po Hohmannově trajektorii určíme z 3. Keplerova zákona jako polovinu periody pohybu po celé elipse:

$$\left(\frac{T}{T_Z}\right)^2 = \left(\frac{a}{r_Z}\right)^3 \qquad t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{2}\left(\frac{a}{r_Z}\right)^{\frac{3}{2}} \doteq 259\ \mathrm{d}\,.$$

**2 body**




**Obr. RD.1**

d) Na obr. RD-1 jsou trajektorie Země, Marsu a kosmické lodi zobrazeny ve vyznačeném měřítku. Během letu kosmické lodi se průvodiče Země a Marsu otočí o úhlové dráhy

$$\varphi_{Z} = \frac{t}{T_{Z}} \cdot 360^\circ = 255^\circ\,, \qquad \varphi_{M} = \frac{t}{T_{M}} \cdot 360^\circ = 136^\circ\,.$$

Vynesením těchto úhlů nalezneme hledané polohy $Z_2$ a $M_1$.

**4 body**

**4.** a) Označíme-li $h$ výšku sudu a $r$ jeho poloměr, je hmotnost sudu

$$m = \varrho(2\pi r^2 + 2\pi r h)d\,.$$

S uvážením $r = \frac{h}{2}$ pak máme $m = \frac{3}{2}\varrho\pi h^2 d$, z čehož výška sudu je

$$h = \sqrt{\frac{2m}{3\pi d\varrho}}\,.$$

Číselně vychází $h = 47$ cm. **3 body**

b) Objem sudu je $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}h^3$ a po dosazení výsledku úlohy a)

$$V = \sqrt{\frac{m^3}{54\pi d^3\varrho^3}}\,.$$

Číselně vychází $V = 83$ l. **3 body**

c) Platí $m' = m + \varrho_1 V = m + \varrho_1\sqrt{\frac{m^3}{54\pi d^3\varrho^3}}\,.$

Číselně vychází $m' = 133$ kg. **2 body**

d) Z Archimédova zákona plyne $\varrho_0 V g > (m + m_1)g$, kde $\varrho_0$ je hustota vody.
Z rovnice dostaneme $m_1 < \varrho_0 V - m$.
Číselně vychází $m_1 < 58$ kg. **2 body**

Autoři úloh: I. Volf (1, 2, 3), J. Jírů (4).