Řešení úloh regionálního kola 36. ročníku FO, kategorie B

1. Pohyb lodi po řece je složen z pohybu vzhledem k vodní hladině a z „unášivého“ pohybu vodního proudu. Rychlost lodi je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}$, kterou by měla na klidné hladině, a rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ vodního proudu. Směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ je stejný jako směr, kterým je natočena příď lodi.

a) Loď se dostane k protějšímu břehu za nejkratší dobu t_1, bude-li nasměrována kolmo k vodnímu toku (obr. RB.1a). V takovém případě je výsledná rychlost lodi $\boldsymbol{v}_1$ odchýlena od směru kolmého k rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ o úhel α. Platí

$$t_1 = \frac{d}{v}\,, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + v^2}\,, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0}{v}\,.$$

Bod B, kde loď přistane, je od protějšího bodu A' vzdálen o

$$|BA'| = v_0 t_1 = d\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$ **1 bod**

Po dosazení: $t_1 = 120\ \mathrm{s}\,, \quad v_1 = 5{,}39\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad \alpha = 21{,}8^\circ\,, \quad |BA'| = 240\ \mathrm{m}\,.$

1 bod

b) Má-li loď doplout za co nejkratší dobu t_2 do protějšího bodu A', musí se pohybovat přímo po spojnici AA'. Výsledná rychlost lodi $\boldsymbol{v}_2$ je kolmá k rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ (obr. RB.1b). Příď lodi je nutno natočit proti proudu o úhel β. Platí

$$\sin\beta = \frac{v_0}{v}\,, \quad v_2 = \sqrt{v^2 - v_0^2} = v\cos\beta\,, \quad t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{t_1}{\cos\beta}\,.$$

1 bod

Po dosazení: $\beta = 23{,}6^\circ\,, \quad v_2 = 4{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad t_2 = 131\ \mathrm{s}\,.$ **1 bod**

c) Loď se vrátí z bodu B do bodu A za nejkratší dobu t_3, bude-li se pohybovat přímo po spojnici BA. Výsledná rychlost $\boldsymbol{v}_3$ bude od směru kolmého k $\boldsymbol{v}_0$ odchýlena o úhel α, příď lodi je nutno natočit o úhel $\gamma > \alpha$ (obr. RB.1c). Platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v\sin\gamma - v_0}{v\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma - \mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\gamma}\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\,, \quad \gamma = 2\alpha\,,$$

$$t_3 = \frac{d}{v\cos\gamma} = \frac{d}{v\cos 2\alpha} = \frac{d}{v(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{d}{v\left(2\,\frac{v^2}{v^2+v_0^2} - 1\right)} = \frac{d}{v}\cdot\frac{v^2+v_0^2}{v^2-v_0^2}\,,$$

$$v_3 = \frac{|AB|}{t_3} = \frac{d\sqrt{v^2+v_0^2}}{v}\cdot\frac{v(v^2-v_0^2)}{d(v^2+v_0^2)} = \frac{v^2-v_0^2}{\sqrt{v^2+v_0^2}}\,.$$

3 body

Po dosazení: $t_3 = 166\ \mathrm{s}\,, \quad v_3 = 3{,}90\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad \gamma = 43{,}6^\circ\,.$ **2 body**

d) Úloha a) je řešitelná bez omezení. Úlohy b) a c) jsou řešitelné, jestliže $v > v_0$.

1 bod

Jiné řešení úlohy c):

Posunutí z bodu B do bodu A je složeno z posunutí $\overrightarrow{BC}$ lodi vzhledem k vodní hladině a z posunutí $\overrightarrow{CA}$ vodní hladiny vzhledem k okolní krajině (obr. RB.1d). Platí:

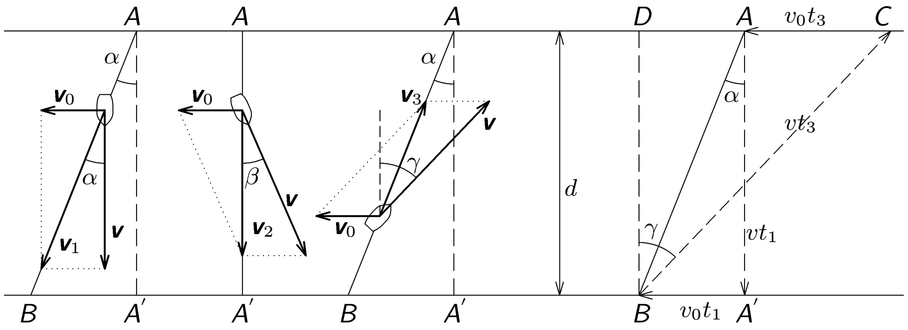
$$(vt_3)^2 = (vt_1)^2 + (v_0t_1 + v_0t_3)^2\,, \quad (v^2 - v_0^2)t_3^2 - 2v_0^2\frac{d}{v}t_3 - \frac{v^2 + v_0^2}{v^2}d^2 = 0\,.$$

Ze dvou kořenů této rovnice vyhovuje úloze kořen

$$t_3 = \frac{d}{v} \cdot \frac{v^2 + v_0^2}{v^2 - v_0^2}\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BDC odvodíme:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_0(t_1 + t_3)}{vt_1} = \frac{v_0t_1\left(1 + \dfrac{v^2 + v_0^2}{v^2 - v_0^2}\right)}{vt_1} = \frac{2vv_0}{v^2 - v_0^2} = \frac{2\frac{v_0}{v}}{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha\,.$$



Obr. RB.1a **b** **c** **d**

2. a) Zenerova dioda se neuplatní, pokud $U < U_z$. V takovém případě

$$U = U_1 \frac{R}{R+R_1} \leq U_z\,; \qquad U_1 \leq U_z \frac{R+R_1}{R} = U_{1min}\,.$$

Pro dané hodnoty $U_{1min} = 15{,}4$ V .

2 body

b) Proud procházející rezistorem R_1, jestliže $U_1 > U_{1min}$, je roven součtu proudů procházejících diodou a zátěží:

$$\frac{U_1 - U}{R_1} = I_d + \frac{U}{R} = \frac{U - U_z}{r} + \frac{U}{R}\,.$$

Z toho vyjádříme napětí na výstupu stabilizátoru

$$U = U_1 \frac{Rr}{R_1R + R_1r + Rr} + U_z \frac{R_1R}{R_1R + R_1r + Rr}\,.$$

Pro dané hodnoty dostáváme $U = 11{,}14$ V.

3 body

c) Zvětší-li se napětí zdroje o ΔU_1, zvětší se napětí na zátěži o

$$\Delta U = \Delta U_1 \frac{Rr}{R_1R + R_1r + Rr} = \frac{\Delta U_1}{\frac{R_1}{r} + \frac{R_1}{R} + 1} = \frac{\Delta U_1 \cdot R||r}{R_1 + R||r}\,.$$

$R||r$ je odpor paralelní kombinace odporů R a r. (Stabilizátor tedy reaguje na změny napětí U_1 jako odporový dělič tvořený odporem R_1 a paralelní kombinací odporů R a r.) Činitel stabilizace je

$$K = \frac{\Delta U_1}{\Delta U} \cdot \frac{U}{U_1} = \left(\frac{R_1}{r} + \frac{R_1}{R} + 1\right) \frac{U}{U_1}\,.$$

Pro dané hodnoty $\Delta U = 10$ mV , $K = 38$.

3 body

d) Určíme nejprve, jaké napětí U_m by bylo na výstupu stabilizátoru, kdyby Zenerovou diodou procházel proud I_{dm}:

$$I_{dm} = \frac{U_m - U_z}{r}\,; \qquad U_m = U_z + rI_{dm}\,.$$

Pro dané hodnoty $U_m = 11,20$ V. V takovém případě by platilo

$$\frac{U_{1max-U_m}}{R_1} = I_{dm} + \frac{U_m}{R},,$$

$$U_{1max} = U_m + U_m \frac{R_1}{R} + R_1 I_{dm} = (U_z + rI_{dm}) \frac{R+R_1}{R} + R_1 I_{dm}\,.$$

Pro dané hodnoty $U_{1max} = 36$ V.

2 body

3. a) Vyjdeme z obr. RB2. Smyčka se nachází v magnetickém poli přímého vodiče. Směr indukčních čár tohoto pole určíme *Ampérovým pravidlem pravé ruky.* V místě smyčky vystupují před nákresnu. Všechny tři rovné části smyčky jsou kolmé k indukčním čarám a působí na ně magnetické síly, jejichž směr určíme *Flemingovým pravidlem levé ruky.* Magnetické síly $\boldsymbol{F}_m'$ a $\boldsymbol{F}_m''$ působící na úseky kolmé k přímému vodiči se ve svém účinku ruší. Z polohy levé ruky na obrázku je zřejmé, že síla $\boldsymbol{F}_m$, která působí na úsek smyčky rovnoběžný s přímým vodičem je odpudivá, jestliže proud v tomto úseku má opačný směr než v přímém vodiči.

2 body

b) V rovnovážné poloze (obr. RB3) platí momentová věta. Součet momentů tíhových sil, které působí na jednotlivé úseky smyčky je v absolutní hodnotě stejný jako moment magnetické síly, která působí na vodorovný úsek smyčky. Platí

$$F_1 l \sin\alpha + F_2 \frac{l}{2} \sin\alpha + F_3 \frac{l}{2} \sin\alpha = F_m l \cos\frac{\alpha}{2} ,$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = \frac{\pi d^2}{4} l \varrho g , \qquad F_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2 l}{2l \sin\frac{\alpha}{2}} .$$

3 body

Po dosazení a úpravě dostaneme

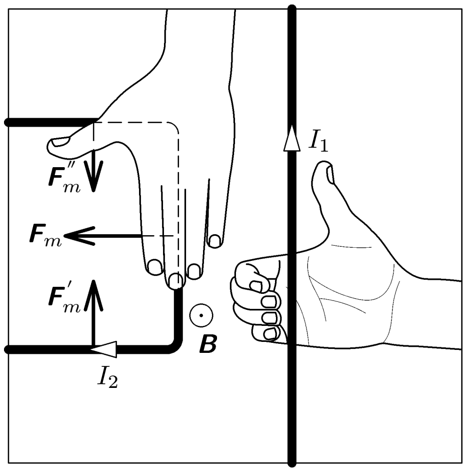
$$\pi d^2 l^2 \varrho g \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\mu_0 I^2 l \cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi \sin\frac{\alpha}{2}} ,$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 d^2 \varrho g l} , \qquad \alpha = 2 \arcsin\left(\frac{I}{2\pi d}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varrho g l}}\right) .$$

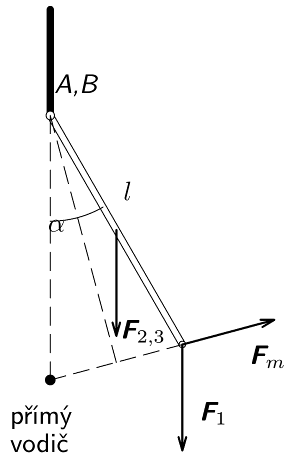
3 body

Pro dané hodnoty: $\alpha = 4{,}44° = 4°26'$.

2 body



Obr. RB2



Obr. RB3

4. a) Vztlaková síla musí mít alespoň takovou velikost, jako je tíha obalu a vzduchu uvnitř balonu:

$$V\varrho_1 g = mg + V\varrho_2 g\,, \qquad \frac{4}{3}\pi r^3\varrho_1 = 4\pi r^2\gamma + \frac{4}{3}\pi r^3\varrho_2\,,$$

ϱ_1 ... hustota okolního vzduchu $\quad\varrho_2$ ... hustota vzduchu uvnitř balonu, m ... hmotnost obalu. Hustotu vzduchu určíme ze stavové rovnice:

$$\varrho = \frac{pM_m}{R_m T}\,, \qquad r = \frac{3\gamma T_1 T_2 R_m}{p_a M_m (T_2 - T_1)}\,.$$

2 body

Pro dané hodnoty: $r = 2{,}6$ m. **1 bod**

b) Hmotnost balonu se zátěží je $(k+1)$-krát větší než hmotnost obalu:

$$V\varrho_1 g = (k+1)mg + V\varrho_2 g\,,$$

$$r = \frac{3(k+1)\gamma T_1 T_2 R_m}{p_a M_m (T_2 - T_1)}\,.$$

1 bod

Pro dané hodnoty: $r = 10{,}4$ m. **1 bod**

c) Z podmínky rovnováhy pro balon se zátěží m_0

$$V\varrho_1 g = (m_0 + m)g + V\varrho_2 g\,,$$

dojdeme k rovnici

$$\frac{4\pi p_a M_m}{3R_m}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) r^3 - 4\pi r^2\gamma - m_0 = 0\,.$$

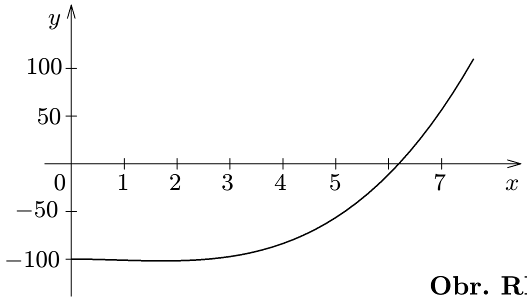
2 body

Je to rovnice třetího stupně s neznámou r, kterou vyřešíme numericky. Po dosazení dostáváme rovnici s neznámou $x = \{r\}$ (číselná hodnota poloměru):

$$f(x) = 0{,}726\ x^3 - 1{,}88\ x^2 - 100 = 0\,.$$

Z grafu funkce $y = f(x)$ na obr. RB4 odhadneme $r \doteq 6{,}2$ m. Přesnější výpočet vede k hodnotě $r = 6{,}19$ m.

3 body



Obr. RB4

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3) a V. Vícha (4).