Řešení teoretických úloh celostátního kola 36. ročníku FO

1.a) Nejprve určíme koeficient restituce jako poměr velikostí rychlosti před dopadem na podlahu a po odrazu od podlahy po volném pádu z výšky h_0:

$$k = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h}{h_0}} = 0{,}810\,.$$

2 body

Označme:

v_0 .... velikost počáteční rychlosti vrhu,
v_1 .... velikost rychlosti před prvním dopadem na podlahu,
v_2 .... velikost rychlosti po prvním odrazu od podlahy,
v_3 .... velikost rychlosti před dopadem na strop,
v_4 .... velikost rychlosti po odrazu od stropu,
v_5 .... velikost rychlosti před druhým dopadem na podlahu,
v_6 .... velikost rychlosti po druhém odrazu od podlahy.
v_7 .... velikost rychlosti po třetím odrazu od podlahy.

Ze zákona zachování energie a užitím koeficientu restituce odvodíme:

$$v_6 = \sqrt{2gh_1} = 6{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_5 = \frac{v_6}{k} = 7{,}73\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_4 = \sqrt{v_5^2 - 2gH} = 3{,}28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_3 = \frac{v_4}{k} = 4{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_2 = \sqrt{v_3^2 + 2gH} = 8{,}08\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_1 = \frac{v_2}{k} = 9{,}98\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_0} = 8{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_7 = k \cdot v_6 = 5{,}07\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

Pohyby mezi podlahou a stropem probíhaly jako rovnoměrně zrychlené a rovnoměrně zpomalené se zrychlením o velikosti g. Z toho pro jednotlivé doby plyne:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{g} = 0{,}176\ \mathrm{s}\,, \quad t_2 = \frac{v_2 - v_3}{g} = 0{,}412\ \mathrm{s}\,, \quad t_3 = \frac{v_5 - v_4}{g} = 0{,}454\ \mathrm{s}\,.$$

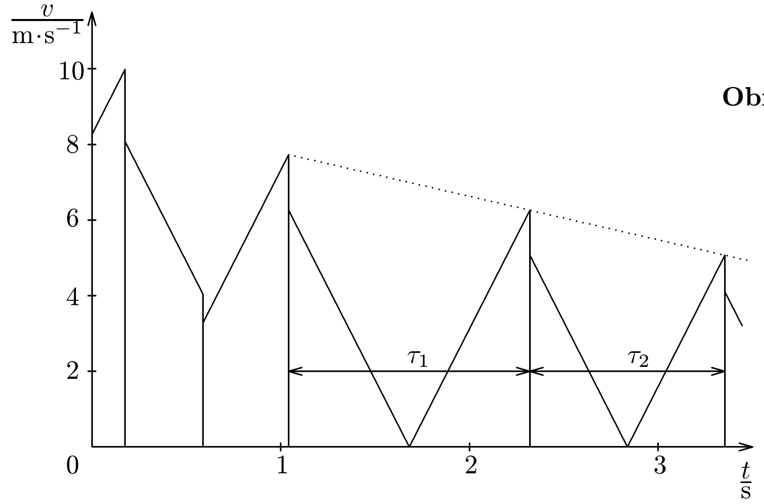
Po druhém odrazu od podlahy probíhá pohyb jako série svislých vrhů vzhůru, z nichž první má počáteční rychlost v_6 a dobu $\tau_1 = 2v_6/g = 1{,}278\ \mathrm{s}$ a každý další má počáteční rychlost a dobu k-krát menší. V grafu použijeme ještě hodnotu $\tau_2 = 1{,}034\ \mathrm{s}$.

2 body

b) Graf závislosti velikosti rychlosti na čase je na obr. RA-1. Během deformace při odrazech klesá velikost rychlosti až na nulu. Dobu trvání deformace zanedbáváme. **2 body**

c) Celkovou dobu pohybu od druhého odrazu míčku od podlahy až do zastavení určíme jako součet nekonečné geometrické řady:

$$\tau = \frac{\tau_1}{1-k} = 6{,}73\ \mathrm{s}\,. \qquad \textbf{2 body}$$



Obr. RA-1

2. Za dobu $\mathrm{d}\tau$ vydá zdroj elektrickou energii $\mathrm{d}E_e$, která je rovna přírůstku $\mathrm{d}U$ vnitřní energie vinutí. Platí

$$\mathrm{d}E_e = \frac{U_e^2}{R}\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_e^2}{R_0(1+\alpha t)}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}U = mc\,\mathrm{d}t\,,$$

$$(1+\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_e^2}{R_0 mc}\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

2 body

Integrací v mezích od t_1 do t a od 0 s do τ a úpravami dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\int\limits_{t_1}^{t}(1+\alpha t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\tau}\frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad \left[t+\frac{\alpha t^2}{2}\right]_{t_1}^{t} = \left[\frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\tau\right]_0^{\tau}\,,$$

$$t+\frac{\alpha t^2}{2}-t_1-\frac{\alpha t_1^2}{2} = \frac{U_e^2(1+\alpha t_1)}{R_1 mc}\tau\,,$$

$$t^2+\frac{2}{\alpha}t-\left(\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau+\frac{2t_1}{\alpha}+t_1^2\right)=0\,.$$

2 body

Úloze vyhovuje kořen

$$t = -\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2t_1}{\alpha}+t_1^2+\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau}\,,$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}+t_1\right)^2+\frac{2U_e^2(1+\alpha t_1)}{\alpha R_1 mc}\tau}\,.}$$

Grafem této závislosti je úsek paraboly. **2 body**

Pro dané hodnoty dostáváme závislost číselné hodnoty teploty na číselné hodnotě doby průchodu elektrického proudu ve tvaru

$$\boxed{\{t\} = -250+\sqrt{72900+262.5\{\tau\}}\,, \quad \tau \geq 0\ \mathrm{s}\,,}$$

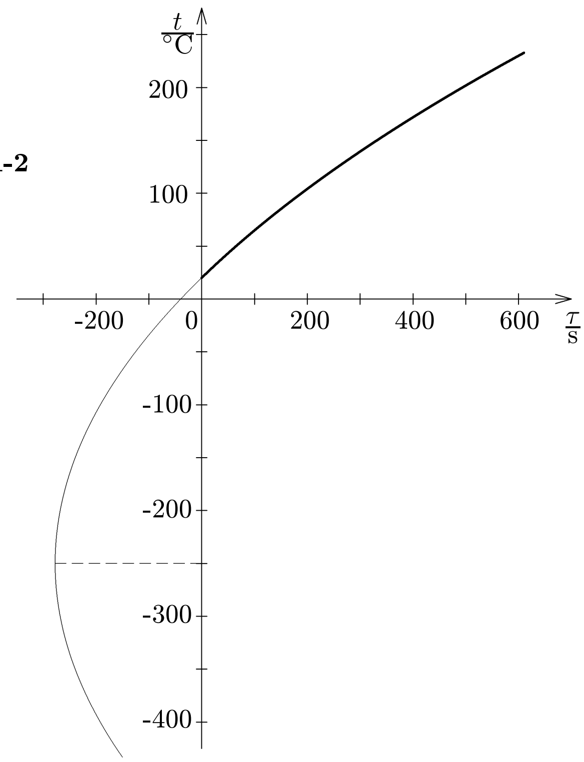
tabulku

τ/s	0	100	200	300	400	500	600
t/°C	20	65	104	139	172	202	230

2 body

a graf

Obr. RA-2



2 body

3. a) Pro adiabatický děj $1-2$ platí:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}\,,\qquad p_1V_1^{\kappa}=p_2V_2^{\kappa}\,,\qquad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}=\varepsilon^{\kappa-1}\,,$$

$$\boxed{T_2=T_1\varepsilon^{\kappa-1}\,,\qquad p_2=p_1\varepsilon^{\kappa}\,.}$$

Pro izobarický děj $2-3$ platí:

$$\frac{T_3}{T_2}=\frac{V_3}{V_2}=\varphi\,,$$

$$\boxed{T_3=T_2\varphi=T_1\varepsilon^{\kappa-1}\varphi\,,\qquad p_3=p_2=p_1\varepsilon^{\kappa}\,.}$$

Pro adiabatický děj $3-4$ platí:

$$p_3V_3^{\kappa}=p_4V_4^{\kappa}\,,\qquad \frac{T_4}{T_3}=\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\kappa-1}=\left(\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}=\varphi^{\kappa-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}\,,$$

$$T_4=T_3\varphi^{\kappa-1}\varepsilon^{1-\kappa}\,,\qquad \boxed{T_4=T_1\varphi^{\kappa}\,,}$$

$$p_4=p_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\kappa}=p_3\left(\frac{V_3}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}=p_1\varepsilon^{\kappa}\varphi^{\kappa}\varepsilon^{-\kappa}\,,\qquad \boxed{p_4=p_1\varphi^{\kappa}\,.}$$

3 body

Pro dané hodnoty:
$T_1=300\ \mathrm{K}\,,\ T_2=994\ \mathrm{K}\,,\ T_3=1790\ \mathrm{K}\,,\ T_4=683\ \mathrm{K}\,,$
$(t_1=27\ °\mathrm{C}\,,\ t_2=721\ °\mathrm{C}\,,\ t_3=1517\ °\mathrm{C}\,,\ t_4=410\ °\mathrm{C})\,,$
$p_1=0{,}100\ \mathrm{MPa}\,,\ p_2=6{,}63\ \mathrm{MPa}\,, p_3=6{,}63\ \mathrm{MPa}\,,\ p_4=0{,}23\ \mathrm{MPa}\,.$

2 body

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m=\frac{p_1V_1M_m}{R_mT_1}\,.\quad \text{Z toho plyne:}\ \ mc_V=2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}\,.$$

Během hoření paliva při ději $2-3$ přijme pracovní látka teplo

$$Q_1=mc_p(T_3-T_2)=m\kappa c_V(T_3-T_2)=2{,}5\kappa\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3-T_2)\,.$$

Při izochorickém ději $4-1$ odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2{}'=mc_V(T_4-T_1)=2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}(T_4-T_1)\,.$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2^{'}}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2^{'}}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \, .$$

Pro dané hodnoty:
$Q_1 = 1860 \text{ J}\,,\ Q_2^{'} = 640 \text{ J}\,,\ \eta = 66\ \%\,.$

3 body

c) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\varphi^\kappa - 1}{\varepsilon^{\kappa-1}\varphi - \varepsilon^{\kappa-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^\kappa - 1}{\varphi - 1} \, ,$$

což jsme měli dokázat.

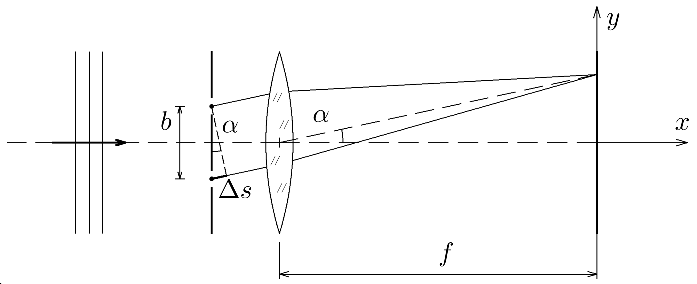
2 body

4. a) Otvory difrakční překážky jsou koherentní zdroje dvou světelných vlnění. Dráhový rozdíl, se kterým se setkávají tato vlnění v bodě stínítka o souřadnici y určíme podle obr. RA-3:

$$\Delta s = b \cdot \sin\alpha \doteq b \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{b\,y}{f} \,.$$

Interferenční maxima (světlé proužky) vznikají v místech, kde

$$\Delta s = k \cdot \lambda \,, \qquad y \doteq k\frac{\lambda f}{b} \,, \qquad k \;\cdots\; \text{celé} \,.$$



Obr. RA-3

Nulté hlavní maximum leží uprostřed stínítka. Interferenční minima (tmavé proužky) vznikají v místech, kde

$$\Delta s = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \,, \qquad y \doteq (2k+1)\frac{\lambda f}{2\,b} \,.$$

Vzdálenost mezi středem prvního tmavého proužku a nultého světlého proužku je tedy

$$\delta y = \frac{\lambda f}{2\,b} \,.$$

Prakticky stejná je vzdálenost středu světlého proužku a středu sousedního tmavého proužku v celém interferenčním jevu. **2,5 bodu**

b) Přichází-li světelné vlnění ze směru odchýleného od optické osy o úhel $\vartheta/2$, odchýlí se o stejný úhel i poloha nultého interferenčního maxima. Interferenční proužky se posunou ve směru osy y o

$$\Delta y = f \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \doteq \frac{f\vartheta}{2} \,.$$

1,5 bodu

c) Dva samostatné zdroje světla nejsou koherentní a jejich vlnění proto vytvářejí na stínítku dvě samostatné soustavy proužků posunuté o

$$\Delta y = 2f\frac{\vartheta}{2} \doteq f\vartheta\,.$$

Osvětlení se sčítají. Jestiže světlé proužky vytvořené jedním zdrojem splývají s tmavými proužky vytvořenými druhým zdrojem, interferenční jev zmizí. Nejmenší posunutí, při kterém k tomu dojde je

$$\Delta y = \delta y = \frac{\lambda f}{2\,b}\,.$$

Tomu odpovídá úhlová odchylka světelných zdrojů

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2\,b}\,.$$

2 body

d) Slunce je plošný světelný zdroj složený z velkého počtu nezávislých bodových zdrojů, které jsou od optické osy odchýleny o různé úhly. Jimi vytvořené interferenční proužky jsou na stínítku různě posunuty a interference je nejlépe pozorovatelná, jen když toto posunutí je menší než délka δy vypočítaná v a). Můžeme-li Slunce nahradit dvěma bodovými zdroji o úhlové vzdálenosti $\vartheta = 0{,}38\,d$ a vlnové délce λ, zmizí interferenční proužky poprvé, když

$$b = \frac{\lambda}{2\,\vartheta}\,.$$

Pro dané hodnoty

$$b = \frac{550\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{2\cdot 729"}\cdot 206\,265" = 0{,}078\ \text{mm}\,.$$

Tedy pro $b < \frac{1}{20}\ \text{mm} = 0{,}05\ \text{mm}$ lze získat dobře viditelné interferenční proužky.

2 body

e) Úhlový průměr hvězdy α *Herculis* určíme ze vztahu

$$d = \frac{\vartheta}{0{,}38} = \frac{\lambda}{0{,}38\cdot 2\,b} = \frac{\lambda}{0{,}76\,b}\,.$$

Pro dané hodnoty:

$$d = \frac{500\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{0{,}76\cdot 4{,}90\ \text{m}}\cdot 206265" = 0{,}028"\,.$$

2 body

Poznámka: Moderní interferometry umožňují měřit úhový průměr hvězd až do hodnot $d \approx 0{,}002"$; pro *Vegu* (α *Lyr*) je $d = 0{,}003"$.

Autoři úloh: V. Houdek (2), M. Ouhrabka (4) a I. Volf (1 a 3).