Řešení úloh krajského kola 36. ročníku FO, kategorie A

1 a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. RA1. Pohyby obou těles jsou popsány parametrickými rovnicemi:

1.těleso – vrh vodorovný:

$$x_1 = v_0 t_1\,,\quad y_1 = h_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

2. těleso – volný pád:

$$x_2 = d\,,\quad y_2 = h_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

Při srážce platí: $x_1 = x_2$

$$v_0 t_1 = d$$

$$t_1 = \frac{d}{v_0}$$

$$h_3 = h_1 - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0}\right)^2$$

$$h_3 = h_1 - \frac{g d^2}{2 v_0^2} = 7{,}94\ \mathrm{m}$$

Ke srážce došlo ve výšce $h_3 = 7,94\ \mathrm{m}$. **2 body**

b)

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ h_1 - \frac{g d^2}{2 v_0^2} &= h_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \\ t_2 &= \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}} \end{aligned}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}} - \frac{d}{v_0} = 0,37\ \mathrm{s}$$

První těleso musíme vymrštit $3,7$ s po uvolnění druhého tělesa. **2 body**

c) Při srážce platí zákon zachování hybnosti. Hybnost tělesa vzniklého při srážce určíme po složkách (obr. RA2):

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$$

$$p_x = p_{1x} + p_{2x} = m_1 v_0$$

$$p_y = p_{1y} + p_{2y} = -m_1 g \frac{d}{v_0} - m_2 g \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}}$$

$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{(m_1 v_0)^2 + \left(\frac{m_1 g d}{v_0} + m_2 g \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}}\right)^2} = (m_1 + m_2) v'\,,$$

$$v' = \frac{\sqrt{(m_1 v_0)^2 + \left(m_1 g \frac{d}{v_0} + m_2 g \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}}\right)^2}}{m_1 + m_2} = 13,5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p_x}{|p_y|} = \frac{m_1 v_0}{m_1 g \frac{d}{v_0} + m_2 g \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g} + \frac{d^2}{v_0^2}}} = 0,243\,;\quad \alpha = 13^\circ 40'$$

Těleso, které vznikne při srážce má počáteční rychlost o velikosti $13,4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, která je od svislého směru odchýlena o úhel $13°40'$. **3 body**

d) Po srážce probíhá šikmý vrh dolů. Počítáme-li čas od okamžiku srážky, platí:

$$x = d + v' t \sin\alpha\,, \qquad y = h_3 - v' t \cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Při dopadu na zem

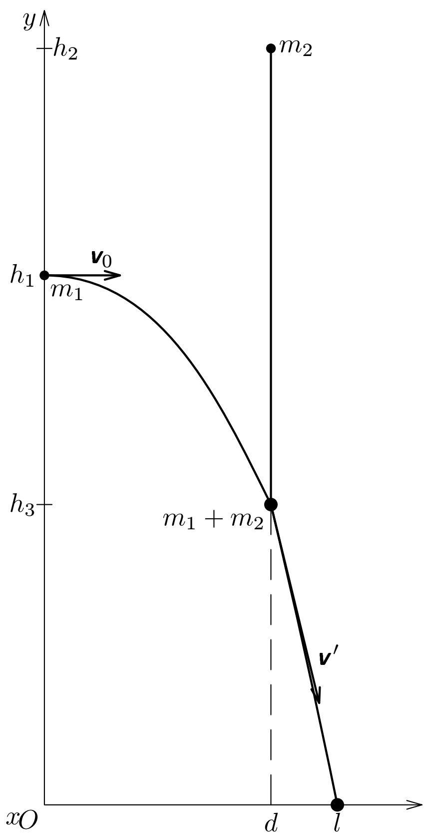
$$h_3 - v' t \cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,; \quad t = \frac{-v' \cos\alpha \pm \sqrt{(v' \cos\alpha)^2 + 2gh_3}}{g}\,.$$

Úloze vyhovuje jen kořen se znaménkem [+]. Dálka vrhu je:

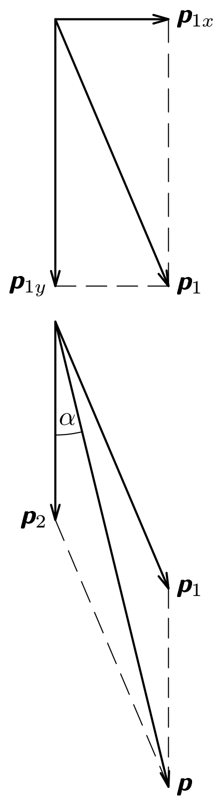
$$x = l = d + v' t \sin\alpha$$

$$l = d + \frac{v' \sin\alpha}{g}\left(\sqrt{(v' \cos\alpha)^2 + 2gh_3} - v' \cos\alpha\right) = 7,62\ \mathrm{m}\,.$$

3 body



Obr. RA1



Obr. RA2

2 a) Změna indukčního toku indukuje po dobu Δt v rámečku elektromotorické napětí U_i, obvodem prochází proud

$$I_0 = \frac{U_i}{R} = \frac{\left|-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right|}{2(a+b)\sigma} = \frac{S(B_2 - B_1)}{2(a+b)\sigma\Delta t}\,.$$

Libovolným průřezem drátu, ze ktrého je rámeček zhotoven, projde náboj

$$\Delta Q = I_0 \Delta t = \frac{ab(B_2 - B_1)}{2(a+b)\sigma} = 5,89\ \mathrm{C}\,.$$

2 body

b) V rámečku se po dobu růstu magnetické indukce indukuje stejný proud I_0, jako v případě a). Na strany rámečku rovnoběžné s dlouhým vodičem působí magnetické síly opačného směru. Jejich výslednice má velikost

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_0}{2\pi l} b - \frac{\mu_0 I_1 I_0}{2\pi(l+a)} b = \frac{\mu_0 I_1 I_0 ab}{2\pi l(l+a)}\,,$$

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 a^2 b^2 (B_2 - B_1)}{4\pi\sigma l(l+a)(a+b)\Delta t} = 8,3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

Na obr. RA3 je znázorněno jedno z možných uspořádání pokusu. Křížky vyznačují směr indukčních čar rostoucího vnějšího magnetického pole, které vstupují do nákresny. Magnetické pole dlouhého vodiče s proudem I_1 vyznačeno není. Směr proudu I_0 je určen podle Lencova pravidla – v bližší části rámečku je nesouhlasný s proudem I_1, ve vzdálenější části je souhlasný. Bližší strana rámečku je tedy odpuzována od vodiče a vzdálenější je přitahována k vodiči, přičemž odpudivá síla převládá – výsledná síla je tedy odpudivá. Kdybychom obrátili směr proudu I_1, výsledná síla by byla přitažlivá. **2 body**

c) Velikost magnetické indukce ve vzdálenosti x od dlouhého přímého vodiče s proudem I_1 je určena vztahem

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x}\,.$$

Indukční tok Φ procházející plochou rámečku určíme integrací (obr. RA4):

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = Bb\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x} b\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\Phi = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln\frac{l+a}{l} = 2,2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb}\,.$$

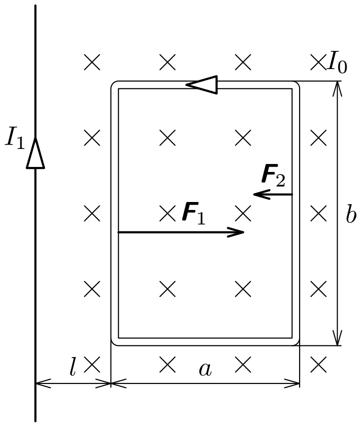
2 body

d) Náboj, který projde libovolným průřezem drátu, z něhož je zhotoven rámeček během růstu proudu v dlouhém vodiči určíme stejně jako v části a):

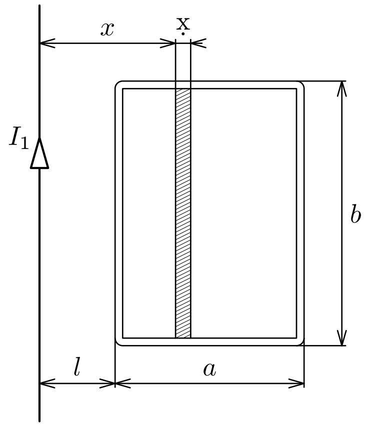
$$\Delta Q^{'} = I^{'}\Delta t = \frac{\left|-\dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right|}{2(a+b)\sigma}\Delta t = \frac{\mu_0 b(I_2 - I_1)\ln\dfrac{l+a}{l}}{4\pi\sigma(a+b)} = 1,1\cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}\,.$$

Podle Lenzova pravidla bude mít indukovaný proud v bližší části rámečku opačný směr než proud v dlouhém vodiči. Rámeček bude vodičem odpuzován.

2 body



Obr. RA3



Obr. RA4

3 a) Průchod světla vodní hladinou v bodě X proběhne podle zákona lomu. Vzhledem k malé přesnosti zadání některých veličin můžeme relativní index lomu mezi vzduchem a vodou nahradit absolutním indexem lomu pro vodu.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{n_2}{n_1} \doteq n_2.$$

Zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby svislá osa y procházela bodem A a vodorovná osa x bodem B. Vodorovná souřadnice bodu X musí splňovat rovnici

$$\sin^2\alpha = n^2\sin^2\beta\,, \qquad \frac{x^2}{r^2+x^2} = \frac{n^2(2r-x)^2}{r^2+(2r-x)^2}\,.$$

2 body

Po úpravě a substituci $z = x/r$ dostaneme rovnici čtvrtého stupně

$$(n^2-1)z^4 - 4(n^2-1)z^3 + 5(n^2-1)z^2 - 4n^2 z + 4n^2 = 0\,,$$

kterou musíme po dosazení za index lomu dořešit některou numerickou metodou. Řešíme tedy rovnici

$$f(z) = 0,771561z^4 - 3,086244z^3 + 3,857805z^2 - 7,086244z + 7,086244 = 0\,.$$

2 body

Vzhledem k tomu, že hledaná souřadnice x leží zřejmě v intervalu $(r;\,2r)$, určíme kořen rovnice z intervalu $z \in (1;\,2)$. S přesností na 6 desetinných míst je jím číslo

$$z = 1,269039\,.$$

a souřadnice bodu X je po zaokrouhlení $x = 0,508$ m.

S obyčejnou kalkulačkou můžeme dojít k dostatečně přesnému výsledku $z \doteq 1.2690$ postupným omezováním intervalu proměnné z na základě výpočtu funkčních hodnot:

z	$f(z)$
1,0	1,543122
1,5	-1,373107
1,3	-0,183005
1,2	0,404870
1,25	0,112133

z	$f(z)$
1,27	-0,0056673
1,26	0,053279
1,268	0,006129
1,269	0,000231
1,2691	-0,000359

4 body

Poznámka: K výsledku lze ovšem dospět i jinými způsoby, například přes rovnici

$$\sin\alpha - n\sin\beta = 0\,, \quad \text{po dosazení} \quad \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{r}\right) - n\sin\left[\operatorname{arctg}\left(2 - \frac{x}{r}\right)\right] = 0\,.$$

b) Doba, kterou světlo potřebuje k proběhnutí dráhy AXB je

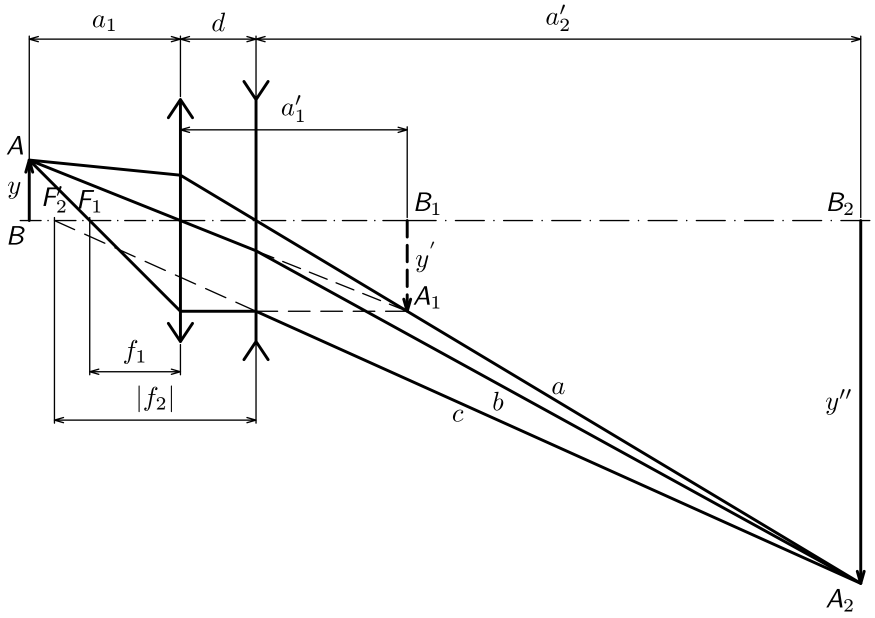
$$t = \frac{|AX|}{v_1} + \frac{|XB|}{v_2} = \frac{n_1\sqrt{x^2 + r^2} + n_2\sqrt{(2r - x)^2 + r^2}}{c}\,.$$

Po dosazení $t = 4.36 \cdot 10^{-9}$ s.

2 body

4 a) Grafické řešení úlohy pomocí význačných světelných paprsků je na obr. RA5. Nejprve pomocí paprsků a a b nalezneme pomocný obraz A_1 a potom pomocí paprsku c ohniska F_1 a F_2'. Z obrázku je zřejmé, že první čočka je spojka a druhá rozptylka.

5 bodů



b) V početním řešení použijeme označení veličin vyznačené v obr. RA5. Z čočkové rovnice a vztahu pro výpočet zvětšení dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{d - a_1'} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_2}, \quad \frac{y'}{y} = -\frac{a_1'}{a_1}, \quad \frac{y''}{y'} = -\frac{a_2'}{d - a_1'},$$

kterou vyřešíme postupně:

$$\frac{y''}{y} = \frac{a_1' a_2'}{a_1 \left(d - a_1'\right)}, \quad a_1' = \frac{y'' a_1 d}{a_2' y + y'' a_1} = 7{,}5 \text{ cm},$$

$$f_1 = \frac{a_1 a_1'}{a_1 + a_1'} = 3{,}0 \text{ cm},$$

$$f_2 = \frac{\left(d - a_1'\right) a_2'}{d - a_1' + a_2'} = -6{,}7 \text{ cm},$$

5 bodů