Úlohy 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Dva motocyklisté

Při tréninku na závody motocyklů jede motocyklista A stálou rychlostí $v_A = 120$ km/h a míjí výjezd z depa. Když je ve vzdálenosti $s_0 = 100$ m, vyjíždí z depa motocyklista B s počáteční rychlostí $v_1 = 30$ km/h a se stálým zrychlením a, který za dobu $t_1 = 12$ s dosáhne rychlosti $v_B = 140$ km/h a dále se pohybuje touto rychlostí. Určete:

a) kdy motocyklista B dosáhne stejné rychlosti, jakou má motocyklista A,

b) čas, kdy se motocyklisté ocitnou na dráze vedle sebe, a vzdálenost od výjezdu z depa, ve které se tak stane.

c) Jak se změní výsledky části b), vyjede-li motocyklista B na trať ve chvíli, kdy je motocyklista A ještě ve vzdálenosti s_0 před výjezdem z depa?

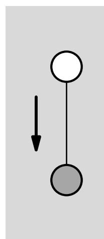
2. Dvě kuličky

Dvě kuličky, dřevěná o hustotě $\varrho_1 = 600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a hliníková o hustotě $\varrho_2 = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a stejném poloměru $r = 1{,}5$ cm, jsou spojeny pevnou tenkou nití a vloženy do vody v hlubokém bazénu. Hliníková kulička klesá ke dnu a táhne za sebou kuličku dřevěnou (obr. 1).

a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{v}$ budou klesat kuličky ke dnu, když se jejich pohyb ustálí? Jakou silou $\boldsymbol{T}$ bude napínána nit mezi kuličkami během jejich rovnoměrného klesání ke dnu? Při klesání kuliček ve vodě můžeme předpokládat platnost Newtonova vztahu pro velikost odporové síly $F = \frac{1}{2} C S \varrho v^2$.

b) Jakou silou $\boldsymbol{T}_1$ bude napínána nit, když hliníková kulička klesne ke dnu?

c) Jaký poloměr r_1 by musela mít dřevěná kulička, aby se soustava ve vodě vznášela? Jakou silou $\boldsymbol{T}_2$ bude napínána nit v tomto případě?



Obr. 1

Hustota vody $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Součinitel odporu pro kouli je $C = 0{,}48$. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

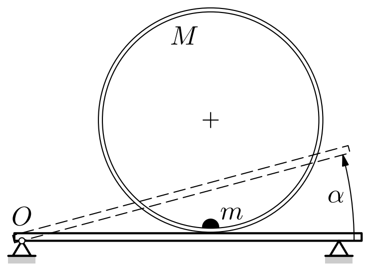
3. Na šikmé ploše

Na obvodu tenké pevné obruče o hmotnosti M a poloměru r je z vnitřní strany připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Obruč stojí na vodorovné desce, kterou začneme velmi pomalu naklánět okolo osy rovnoběžné s rotační osou obruče (obr. 2).

a) Jak se bude v závislosti na sklonu α desky měnit odchylka β spojnice středu obruče s tělískem od vodorovné roviny?

b) Jak se v závislosti na úhlu α bude měnit poloha bodu, ve kterém se obruč dotýká desky?

c) Do jaké maximální hodnoty můžeme zvětšovat úhel α, aniž by obruč opustila desku? Součinitel smykového tření mezi obručí a deskou je f.



Obr. 2

d) Úlohu řešte nejprve obecně. Pak zjistěte, jaká situace nastane v okamžiku, kdy úhel α dosáhne hodnoty 5°, jestliže $M = 1{,}00$ kg, $m = 200$ g, $r = 25$ cm, $f = 0{,}20$ a počáteční vzdálenost bodu dotyku obruče od dolního okraje desky je $d_0 = 15$ cm.

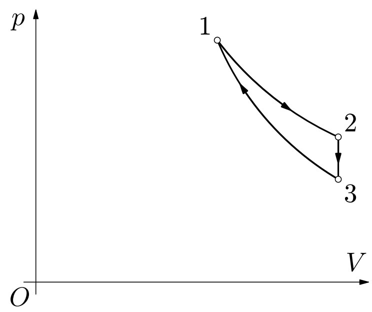
4. Kruhový děj

Ideální tepelný stroj, jehož pracovní látkou je 1 mol ideálního plynu s jednoatomovými molekulami (Poissonova konstanta $\varkappa = \frac{5}{3}$), pracuje v cyklu tří na sebe navazujících dějů:

[1 → 2] – plyn se izotermicky rozepne z původního objemu $V_1 = 30{,}0$ l a tlaku $p_1 = 200$ kPa na objem $V_2 = 50{,}0$ l a tlak p_2.

[2 → 3] – plyn izochoricky ochladíme.

[3 → 1] – plyn adiabaticky stlačíme do původního stavu.



Obr. 3

Určete

a) tlaky plynu a teploty ve stupních Celsia odpovídající stavům 1, 2, 3,

b) práci vykonanou ideálním plynem v průběhu jednoho cyklu a teplo, které je třeba dodat plynu v průběhu jednoho cyklu,

c) účinnost tohoto kruhového děje.

Část a) a b) řešte nejprve obecně (své řešení vyjádřete vždy pouze pomocí zadaných hodnot), potom pro zadané hodnoty. Vnitřní energie ideálního plynu s jednoatomovými molekulami je $U = \frac{3}{2}nRT$. Práce vykonaná plynem při izotermickém rozepnutí z objemu V_1 na objem V_2 je $W' = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

5. Hasičská stříkačka

Hasič stříká vodu ze stříkačky, která je připojená hadicí k válcové cisterně na hasičském voze. Voda se do hadice vhání čerpadlem připevněným k cisterně. Průměr cisterny $D = 2{,}5$ m, její délka $L = 3{,}5$ m, vnitřní průměr hadice $d_1 = 12$ cm, vnitřní průměr dýzy stříkačky $d_2 = 3{,}0$ cm.

a) Jaký musí být přetlak p v hadici (rozdíl vnitřního tlaku a tlaku atmosférického), aby stříkačka dostříkla vodu do maximální vzdálenosti $l_\mathrm{m} = 20$ m? Do jaké maximální výšky h_m je stříkačka schopna dostříknout při tomto tlaku?

b) Jak dlouho může hasič hasit požár za uvedených podmínek, je-li na začátku objem vody v cisterně roven $\eta = 80$ % jejího vnitřního objemu?

c) Stříkačka působí na hasiče reaktivní silou proti směru vodního proudu. Jakou zpětnou sílu musí překonávat hasič, je-li při stříkání vody ze stříkačky v hadici tlak p podle a)?

d) Jaký je výkon čerpadla za daných podmínek?

Úlohu řešte obecně a potom pro dané hodnoty. Vodu považujte za ideální kapalinu, odpor vzduchu považujte za zanedbatelný, výškové rozdíly mezi hladinou vody v cisterně, čerpadlem, dýzou stříkačky a povrchem terénu považujte za nulové.

6. *Praktická úloha:*

Pohyb hladiny při výtoku kapaliny otvorem ve stěně nádoby

Vezměte plastovou láhev, která má mezi dnem a hrdlem stejný příčný průřez ve výškovém rozmezí aspoň 20 cm. V nejnižším bodě válcové části vytvořte pomocí hřebíku o průměru asi 2,5 mm zahřátého v plameni malý otvor. Na stěně válcové části vytvořte svislou stupnici v centimetrech s počátkem ve středu výtokového otvoru, která určuje výšku hladiny nad středem otvoru.

Naplňte láhev vodou a nechte ji vytékat. V okamžiku, kdy hladina dosáhne úrovně horního konce stupnice, začněte stisknutím stopek měřit čas. Optimální jsou stopky, které umožňují měřit mezičasy. Zaregistrujte časy průchodu hladiny každou ryskou, dokud voda tryská vodorovně a nestéká po stěně, a zapište je do tabulky. Toto celé měření proveďte 5krát.

Vyplňte zbývající část tabulky. V tabulce je $\overline{t}_i$ aritmetický průměr pěti naměřených časů, $\Delta t_i = \overline{t}_i - \overline{t}_{i-1}$ doba průchodu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami, $t_i = \dfrac{\overline{t}_i + \overline{t}_{i-1}}{2}$ aritmetický průměr krajních časů intervalu Δt_i, $v_i = \dfrac{\Delta h}{\Delta t_i}$ průměrná rychlost pohybu hladiny mezi dvěma sousedními ryskami ($\Delta h = 0{,}01$ m).

Považujte nyní rychlost v_i za okamžitou rychlost v čase t_i a do grafu závislosti rychlosti na čase vyneste jednotlivé body. Body proložte přímkou a určete její směrnici.

Stanovte fyzikální význam hodnoty směrnice a napište závěr o charakteru pohybu hladiny v láhvi.

i	$\frac{h}{\mathrm{m}}$	$\frac{t_{i1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i3}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i4}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i5}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\overline{t}_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta t_i = \overline{t}_i - \overline{t}_{i-1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_i = \frac{\overline{t}_i + \overline{t}_{i-1}}{2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}}{10^{-3}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$
0	0,20	-	-	-	-	-	0	-	-	-
1	0,19									
2	0,18									
3	0,17									
⋮	⋮									
17	0,03									
18	0,02									
19	0,01									

7. Zemská atmosféra

Vzdušný obal Země tvoří plyny o průměrné relativní molekulové hmotnosti $M_\mathrm{r} = 28{,}96$. V úloze budeme uvažovat, že vzduch v blízkosti Země má teplotu $t_0 = 0$ °C a tlak $p_0 = 101\,300$ Pa. S rostoucí výškou h nad povrchem Země tlak vzduchu klesá podle vztahu $p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{RT} h}$, $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

a) Vypočtěte hustotu vzduchu ϱ_0 na povrchu Země při teplotě $t_0 = 0$ °C za použití zadaných hodnot a porovnejte ji s hustotou ϱ_{20}, stoupne-li teplota vzduchu na $t = 20$ °C a tlak vzduchu se nezmění.

b) Jaká bude hustota vzduchu ϱ ve výšce 11 km nad povrchem Země, pokud se teplota vzduchu nemění a je rovna t_0?

c) Uvažujte, že do výšky 11 km nad povrchem Země lze vyjádřit pokles teploty vzduchu pomocí vztahu $T = T_0 - bh$, kde $b = 0{,}006\,5\ \mathrm{K \cdot m^{-1}}$, h je výška nad povrchem Země v metrech. Porovnejte velikost střední kvadratické rychlosti molekul dusíku při povrchu Země, kde je teplota $t_0 = 0$ °C a ve výšce $H = 11$ km nad povrchem Země.

d) Odvoďte vztah vyjadřující závislost počtu částic v 1 m^3 vzduchu na výšce h nad povrchem Země. Uvažujte, že teplota vzduchu je stálá. Odhadněte počet částic v 1 m^3 ve výšce 11 km nad povrchem Země.