Řešení úloh 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3), M. Jarešová (4, 7), I. Čáp SR (5), J. Jírů (6).

1.a) Motocyklista B se pohybuje po dobu t_1 se zrychlením

$$a = \frac{v_B - v_1}{t_1} = 2{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Rychlosti v_A dosáhne v čase $t_2 = \dfrac{v_A - v_1}{a} = \dfrac{(v_A - v_1)t_1}{v_B - v_1} = 9{,}8\ \mathrm{s}$ po výjezdu z depa.

2 body

b) Rychlosti v_B dosáhne motocyklista B za dobu $t_1 = 12\ \mathrm{s}$. V tu dobu je motocyklista A vzdálen od výjezdu z depa o $s_A = s_0 + v_A t_1 = 500\ \mathrm{m}$ a motocyklista B o $s_B = v_1 t_1 + \dfrac{1}{2}(v_B - v_1)t_1 = 283\ \mathrm{m}$. Dále se už pohybují oba motocyklisté rovnoměrným pohybem. Motocyklista B dohoní motocyklistu A za dobu $t = t_1 + \dfrac{s_A - s_B}{v_B - v_A} = 51\ \mathrm{s}$ od výjezdu z depa. Bude to ve vzdálenosti $s = s_0 + v_A t = s_B + v_B \dfrac{s_A - s_B}{v_B - v_A} = 1\,800\ \mathrm{m}$ od místa výjezdu z depa.

3 body

c) V čase t_1, kdy motocyklista B dosáhne rychlosti v_B, bude opět ve vzdálenosti $s_B = 283\ \mathrm{m}$. Motocyklista A mezitím dojel do vzdálenosti

$$s'_A = -s_0 + v_A t_1 = 300\ \mathrm{m},$$

takže rozjíždějícího se motocyklistu B předjel. V časovém intervalu $(0, t_1)$ pro dráhy motocyklistů platí

$$v_A t - s_0 = v_1 t + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_B - v_1}{t_1}\cdot t^2.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme kvadratickou rovnici

$$1{,}273t^2 - 25t + 100 = 0,$$

která má dva kořeny: $t_3 = 5{,}6\ \mathrm{s}$ a $t_4 = 14\ \mathrm{s}$. První udává čas, kdy motocyklista A předjede motocyklistu B. Bude to ve vzdálenosti

$$s' = v_A t_3 - s_0 = v_1 t_3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_B - v_1}{t_1}\cdot t_3^2 = 86\ \mathrm{m}$$

od místa výjezdu z depa. Kořen t_4 ale zadání úlohy nevyhovuje, protože se rychlost motocyklisty B po uplynutí doby t_1 nezvyšuje a oba motocyklisté se už pohybují rovnoměrným pohybem. Motocyklista B předjede motocyklistu A za dobu

$$t = t_1 + \frac{s'_A - s_B}{v_B - v_A} = 15\ \mathrm{s}$$

ve vzdálenosti $s'' = -s_0 + v_A t = s_B + v_B \dfrac{s_A - s_B}{v_B - v_A} = 400\ \mathrm{m}$ od místa výjezdu z depa.

5 bodů

2. a) Na horní dřevěnou kuličku působí směrem dolů tah niti $\boldsymbol{T}$ a tíhová síla, směrem nahoru vztlaková síla a síla odporová. Tyto síly jsou v rovnováze:

$$T + \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g + \frac{1}{2} C \pi r^2 \varrho v^2 .$$

Na spodní hliníkovou kuličku působí směrem dolů síla tíhová, směrem nahoru tah niti $-\boldsymbol{T}$, vztlaková a odporová síla:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g = T + \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g + \frac{1}{2} C \pi r^2 \varrho v^2 .$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$T = \frac{2}{3}\pi r^3 (\varrho_2 - \varrho_1) g = 0{,}146\ \mathrm{N}, \quad v = \sqrt{\frac{\frac{4}{3} r g (\varrho_2 + \varrho_1 - 2\varrho)}{C\varrho}} = 0{,}73\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Když hliníková kulička leží na dně, je síla, která napíná nit, rovna rozdílu síly vztlakové a síly tíhové, které působí na dřevěnou kuličku:

$$T_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho - \varrho_1) g = 0{,}055\ \mathrm{N}.$$

2 body

c) Pokud se soustava vznáší ve vodě, působí na horní kuličku směrem dolů tah niti a tíhová síla, směrem nahoru síla vztlaková:

$$T_2 + \frac{4}{3}\pi r_1^3 \varrho_1 g = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \varrho g .$$

Na spodní kuličku působí směrem nahoru tah niti a síla vztlaková, směrem dolů síla tíhová:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g = T_2 + \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g .$$

Řešením soustavy dostaneme

$$T_2 = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_2 - \varrho)g = 0{,}24\ \mathrm{N}, \qquad r_1 = r\sqrt[3]{\frac{\varrho_2 - \varrho}{\varrho - \varrho_1}} = 2{,}4\ \mathrm{cm}.$$

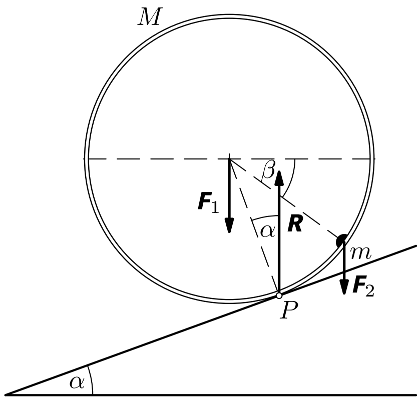
4 body

3. a) Na obruč působí vlastní tíhová síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti Mg, tíha tělíska $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti mg a reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$. Na nakloněné desce zaujme obruč rovnovážnou polohu podle obr. R1. Z rovnováhy momentů vzhledem k bodu dotyku obruče s nakloněnou rovinou plyne

$$Mgr\sin\alpha = mg(r\cos\beta - r\sin\alpha)$$

$$\cos\beta = \frac{(M+m)\sin\alpha}{m}.$$

3 body



Obr. R1

b) Jestliže se deska otočí o úhel α, obruč se otočí o úhel $\frac{\pi}{2} - \beta$. Úhel odvalení obruče po desce je $\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha$ a příslušná délka oblouku, o kterou se bod dotyku přiblíží k dolnímu konci desky, je

$$s = r\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right).$$

(Úhly ovšem musíme vyjádřit v radiánech.)

2 body

c) Krajní situace, kdy ještě může být splněna momentová věta, nastane, když tělísko vystoupí do úrovně středu obruče. V takovém případě

$$\cos\beta = \frac{(M+m)\sin\alpha}{m} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \leq \frac{m}{m+M}. \tag{1}$$

Nemá-li obruč po desce sklouznout, musí tečná a normálová složka reakce $\boldsymbol{R}$ splňovat podmínku

$$R\sin\alpha \leq f\cdot R\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha \leq f. \tag{2}$$

Obruč setrvává na desce, dokud jsou splněny podmínky (1) i (2). Posunutí bodu dotyku určené v b) musí být ovšem menší než jeho počáteční vzdálenost od dolního konce desky.

3 body

d) Pro dané hodnoty jsou podmínky (1) a (2) splněny. Dostáváme $\cos\beta = 0{,}5229$, $\beta = 58{,}5°$, $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta = 0{,}463$ rad, $s = 11{,}6$ cm $< d_0$.

2 body

4. a) Nejprve určíme tlaky p_2, p_3. Pro tlak p_2 z rovnice izotermického děje platí $p_2 = \frac{V_1}{V_2} p_1 = 120$ kPa. Tlak p_3 určíme z rovnice pro adiabatický děj a z poznatku, že děj $[2 \to 3]$ je izochorický, tj.

$$p_3 = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\varkappa} p_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} p_1 = 85{,}4 \text{ kPa}.$$

K výpočtu teplot použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru pro 1 mol. Platí $pV = RT$, z čehož $T = \frac{pV}{R}$.

Ve stavu 1 je teplota $T_1 = \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{8{,}314}$ K $= 722$ K.

Vzhledem k tomu, že děj $[1 \to 2]$ je izotermický, platí $T_2 = T_1$.

Ve stavu 3 je teplota

$T_3 = \frac{p_3 V_3}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} p_1 V_2 = 513$ K.

Ve stavu 1 je teplota $t_1 = 449$ °C, ve stavu 2 je $t_2 = t_1 = 449$ °C a ve stavu 3 je teplota $t_3 = 240$ °C.

4 body

b) Práce vykonaná ideálním plynem v průběhu jednoho cyklu je dána vztahem

$$W' = W'_{12} - W_{31},$$

kde W'_{12} je práce vykonaná ideálním plynem při izotermickém ději a W_{31} je práce spotřebovaná ideálním plynem při adiabatickém ději (při izochorickém ději plyn práci nekoná). Z 1. termodynamického zákona vyplývá pro izotermický děj, že $W'_{12} = Q_\mathrm{T} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Pro adiabatický děj z prvního termodynamického zákona vyplývá, že

$$W_{31} = \Delta U = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}(p_1 V_1 - p_3 V_3) = \frac{3}{2}(p_2 - p_3) V_2.$$

Pro práci W' tedy platí

$$W' = p_2 V_2 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{3}{2}(p_2 - p_3)V_2 = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{3}{2}\left[\frac{V_1}{V_2} - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa}\right] p_1 V_2.$$

Pro dané hodnoty $W' = 467$ J. Teplo dodané plynu v průběhu 1 cyklu je rovno teplu dodanému při izotermickém ději, tedy

$$Q = Q_{12} = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 3\,065 \text{ J}.$$

5 bodů

c) Účinnost kruhového děje je dána vztahem

$$\eta = \frac{W'}{Q} = 15~\%.$$

1 bod

5. a) Předpokládáme, že pohyb vodního proudu odpovídá šikmému vrhu se zanedbatelně malým odporem vzduchu. Pohyb vodního proudu popisují vztahy

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Pro dopad na vodorovnou rovinu procházející ústím dýzy ($y = 0$) dostaneme délku vrhu

$$l = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Maximum tohoto výrazu odpovídá úhlu $2\alpha = 90°$, a tedy $\alpha = 45°$,

$$l_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Z toho $v_0^2 = l_\mathrm{m} g$. Pro proudění vody v hadici použijeme Bernoulliho rovnici – porovnáme místo uvnitř hadice a v ústí dýzy, přičemž neuvažujeme změnu výšky toku:

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p_\mathrm{h} = \frac{1}{2}\varrho v_0^2 + p_\mathrm{a},$$

Z rovnice kontinuity vyplývá vztah $v = v_0\frac{d_2^2}{d_1^2}$. Přetlak v hadici je

$$p = p_\mathrm{h} - p_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\varrho v_0^2\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = \frac{1}{2}\varrho g l_\mathrm{m}\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] \doteq 98 \text{ kPa}.$$

Namíříme-li proud svisle vzhůru, dosáhne výšky

$$h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{l_\mathrm{m}}{2} = 10\ \mathrm{m}.$$

4 body

b) Při rychlosti výtoku v_0 je objemový průtok $Q_V = S_2 v_0 = \dfrac{\pi d_2^2 v_0}{4}$. Doba hašení je

$$t = \frac{V}{Q_V} = \frac{D^2 L\eta}{d_2^2 v_0} = \frac{D^2 L\eta}{d_2^2\sqrt{l_\mathrm{m} g}} \doteq 1{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{s} \doteq 23\ \mathrm{min}.$$

2 body

c) Při zúžení toku vody nastává zrychlení pohybu a tedy i změna hybnosti. Časová změna hybnosti je rovna reaktivní síle

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \varrho Q_V (v_0 - v).$$

Po dosazení

$$F = \varrho \frac{\pi d_2^2}{4} v_0^2 \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right) = \varrho \frac{\pi d_2^2}{4} g l_\mathrm{m} \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right) \doteq 130\ \mathrm{N}.$$

2 body

d) Výkon čerpadla můžeme určit z kinetické energie vody tryskající z dýzy za jednu sekundu:

$$P = \frac{1}{2}\varrho Q_V v_0^2 = \frac{1}{2}\varrho S_2 v_0^3 = \frac{\varrho \pi d_2^2}{8}(g l_\mathrm{m})^{\frac{3}{2}} \doteq 970\ \mathrm{W}.$$

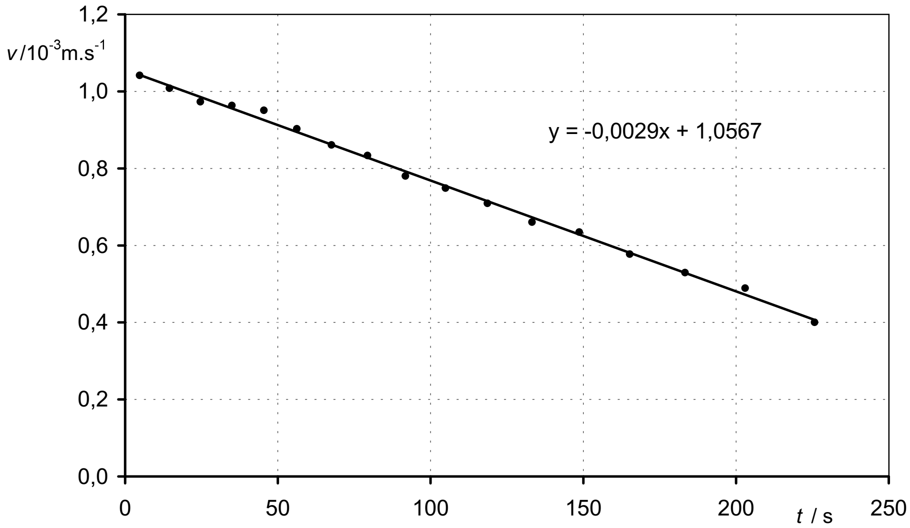
2 body

6. Naměřené hodnoty a jejich zpracování je v tabulce. Při průchodu posledními dvěma ryskami již voda stékala po stěně, proto příslušné časy nebyly měřeny.

Hodnoty z posledních dvou sloupců tabulky jsou vyneseny do grafu závislosti okamžité rychlosti pohybu hladiny na čase a sestrojenými body je proložena přímka.

Závěr: Z grafu lze usuzovat, že pohyb hladiny byl rovnoměrně zpomalený. Absolutní hodnota směrnice přímky udává velikost zrychlení $a = 0{,}0029\ \mathrm{mm/s^2}$.

i	h_i / m	t_{i1} / s	t_{i2} / s	t_{i3} / s	t_{i4} / s	t_{i5} / s	$\bar{t}_i$ / s	$\Delta t_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}$ / s	$t_i = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2}$ / s	$v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}$ / 10^{-3} m·s^{-1}
0	0,20	—	—	—	—	—	0	—	—	—
1	0,19	9,7	9,6	9,3	9,8	9,6	9,6	9,6	4,8	1,042
2	0,18	19,8	19,7	19,0	19,3	19,8	19,5	9,9	14,6	1,008
3	0,17	30,0	29,8	29,5	29,8	29,9	29,8	10,3	24,7	0,973
4	0,16	40,8	40,3	39,4	40,3	40,1	40,2	10,4	35,0	0,963
5	0,15	51,5	50,8	50,3	50,3	50,6	50,7	10,5	45,4	0,951
6	0,14	61,8	62,0	61,1	61,8	62,2	61,8	11,1	56,2	0,903
7	0,13	73,5	73,7	73,0	73,1	73,7	73,4	11,6	67,6	0,861
8	0,12	85,6	85,7	85,1	85,2	85,4	85,4	12,0	79,4	0,833
9	0,11	98,1	98,3	97,8	98,2	98,7	98,2	12,8	91,8	0,780
10	0,10	111,3	112,4	110,8	111,7	111,7	111,6	13,4	104,9	0,749
11	0,09	125,8	125,9	124,7	125,6	126,4	125,7	14,1	118,6	0,709
12	0,08	141,2	141,2	139,6	140,9	141,2	140,8	15,1	133,3	0,661
13	0,07	156,7	156,6	155,8	156,6	157,2	156,6	15,8	148,7	0,635
14	0,06	174,1	174,3	173,1	174,0	174,0	173,9	17,3	165,2	0,577
15	0,05	192,7	193,1	192,3	192,7	193,2	192,8	18,9	183,4	0,529
16	0,04	213,2	213,8	212,9	213,0	213,4	213,3	20,5	203,0	0,489
17	0,03	238,1	237,9	237,2	239,1	238,9	238,2	25,0	225,8	0,400
18	0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	0,01	—	—	—	—	—	—	—	—	—



7. a) Ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = \frac{m}{M_\mathrm{m}} RT$ dostaneme

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{M_\mathrm{m} p}{RT}.$$

Při teplotě 0 °C je hustota vzduchu

$$\varrho_0 = \frac{M_\mathrm{m} p_0}{RT_0} = \frac{28{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 101\,300}{8{,}31 \cdot 273{,}15}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}},$$

obdobně při teplotě 20 °C je hustota vzduchu

$$\varrho_{20} = \frac{M_\mathrm{m} p_0}{RT} = \frac{28{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 101\,300}{8{,}31 \cdot 293{,}15}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 1{,}20\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Pro poměr hustot vzduchu obecně platí $\frac{\varrho_{20}}{\varrho_0} = \frac{T_0}{T} = 0{,}93.$

3 body

b) Vyjdeme ze vztahu $p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{RT} h}$. Dále použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru, který jsme použili v úloze a), tj. $\varrho = \frac{M_\mathrm{m} p}{RT}$. Vzhledem k tomu, že uvažujeme stálou teplotu, můžeme dále psát $\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}$, a tudíž

$$\varrho = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{RT} h} = 1{,}29 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{28{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{8{,}31 \cdot 273{,}15} \cdot 11\,000}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 0{,}33\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

2 body

c) Střední kvadratická rychlost molekul dusíku je dána vztahem

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_\mathrm{m1}}},$$

kde $M_\mathrm{m1} = 28{,}01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$ je molární hmotnost dusíku. Při povrchu Země je $v_\mathrm{k0} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273{,}15}{28{,}01 \cdot 10^{-3}}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 493\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Ve výšce h nad povrchem Země je $v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3R}{M_\mathrm{m1}}(T_0 - bh)}$.

Ve výšce 11 km nad povrchem Země je

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31}{28{,}01 \cdot 10^{-3}}(273{,}15 - 0{,}006\,5 \cdot 11\,000)}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 424\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Pro poměr středních kvadratických rychlostí platí

$$\frac{v_{\mathrm{k0}}}{v_{\mathrm{k}}} = \sqrt{\frac{T_0}{T_0 - bh}} = \sqrt{\frac{273{,}15}{273{,}15 - 0{,}006\,5 \cdot 11\,000}} = 1{,}16.$$

3 body

d) Vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru $pV = NkT$, z čehož $N = \frac{pV}{kT}$. V blízkosti povrchu Země je

$$N_0 = \frac{p_0 V}{k T_0} = \frac{101\,300 \cdot 1}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15}\ \mathrm{m^{-3}} \doteq 2{,}7 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Ve výšce h nad povrchem Země obecně platí

$$N = \frac{pV}{kT_0} = \frac{p_0 V}{kT_0} \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}} g}{RT} h} = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}} g}{RT} h}.$$

Ve výšce 11 km nad povrchem Země je

$$N = 2{,}7 \cdot 10^{25} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{28{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{8{,}31 \cdot 273{,}15} \cdot 11\,000}\ \mathrm{m^{-3}} \doteq 6{,}8 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

2 body