Řešení úloh celostátního kola 53. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3), J. Thomas (4)

1. a) Označme m hmotnost celého rámečku, h hloubku těžiště, kterou budeme měřit od osy otáčení. Potom platí

$$mgh = 2 \cdot \frac{m}{3} g \frac{l}{2} + \frac{m}{3} gl,$$

z čehož

$$h = \frac{2}{3} l.$$

Dále určíme moment setrvačnosti celého rámečku vzhledem k ose otáčení jako součet momentů setrvačnosti jednotlivých částí. K výpočtu těchto dílčích momentů použijeme Steinerovu větu. Pro moment setrvačnosti jedné svislé části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3} l^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{9} ml^2.$$

Pro moment setrvačnosti vodorovné části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_2 = \frac{m}{3} l^2.$$

Celkový moment setrvačnosti je pak

$$J = 2J_1 + J_2 = \frac{5}{9} ml^2.$$

Ze ZZME plyne

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

z čehož

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12g}{5l}}.$$

2 body

b1) Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se mezi konci přímého vodiče délky l, který se pohybuje příčně rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, indukuje napětí o velikosti

$$U_\mathrm{i} = Blv \sin \alpha,$$

kde α je odchylka vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Bez ohledu na orientaci indukce nahoru či dolů bude na středním vodiči maximální velikost napětí při průchodu nejnižší polohou, kde je $\sin \alpha = 1$ a současně i velikost rychlosti maximální:

$$v_{\max} = l\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12}{5} gl}.$$

Po dosazení dostaneme

$$U_{\mathrm{imax}} = Blv_{\mathrm{max}} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}.$$

Závěsné vodiče se pohybují v rovinách rovnoběžných s vektorem magnetické indukce, napětí se na nich neindukuje.

2 body

b2) Na závěsných vodičích má indukované napětí navzájem opačnou polaritu, na zbývajícím vodorovném vodiči je napětí nulové. Proto je $U_{\mathrm{i}} = 0$.

1 bod

b3) Označme α opět okamžitou odchylku vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Ve výchozí vodorovné poloze rámečku je velikost rychlosti nulová, ve svislé poloze rámečku je $\sin\alpha = 0$, tedy v těchto polohách je indukované napětí nulové. Maximální velikost napětí budeme hledat mezi těmito polohami. Rámeček má během pohybu těžiště v hloubce

$$h_\alpha = \frac{2}{3}l\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}l\cos\alpha.$$

V této poloze je velikost rychlosti středního vodiče

$$v = l\omega = \sqrt{\frac{12}{5}gl\cos\alpha}$$

a velikost indukovaného napětí mezi jeho konci

$$U_{\mathrm{i}} = Blv\sin\alpha = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}\cdot\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}.$$

Závěsné vodiče indukční čáry neprotínají, napětí se na nich neindukuje.
Maximum funkce najdeme pomocí derivace podle proměnné α:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}) = \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \sin\alpha\frac{-\sin\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Z podmínky nulové derivace dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2} \qquad (\alpha = 54{,}7^\circ).$$

Ze vztahů mezi goniometrickými funkcemi dále odvodíme

$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = 0{,}620.$$

Maximální velikost indukovaného napětí je

$$U_{\mathrm{imax}} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{27}} = \sqrt[4]{\frac{64}{75}}\cdot B\sqrt{gl^3}.$$

5 bodů

2. a) V obvodu se samotným kondenzátorem platí $I_1 = U/X_C$. Z fázorového diagramu sériového spojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R1 plyne

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI_2)^2 + (X_C I_2)^2} = I_2\sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C^2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = X_C^2\left(\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1\right),$$

$$R = X_C\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1} = 0{,}75X_C.$$

4 body

b) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_2 určíme rovněž z obr. R1. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = -\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = -\frac{4}{3}, \quad \varphi_2 = -53^\circ.$$

Proud I_2 tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o 53°. **1 bod**

c) Samotným rezistorem bude procházet proud

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{X_C I_1}{X_C\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 67\ \text{mA}.$$

1 bod

d) Z fázorového diagramu paralelního zapojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R2 odvodíme

$$I_4 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{X_C^2}} = \frac{U\sqrt{X_C^2 + R^2}}{RX_C} =$$

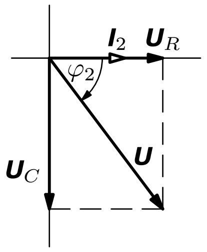
$$= \frac{X_C I_1 \cdot X_C\sqrt{1 + \frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}}{X_C^2\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1}} = \frac{I_1^2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 83\ \text{mA}.$$

3 body

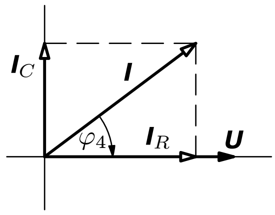
e) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_4 určíme z obr. R2. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = -\frac{I_C}{I_R} = -\frac{I_1}{I_3} = -\frac{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}{I_2} = -0{,}75, \qquad \varphi_4 = -37^\circ.$$

Proud I_4 tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o 37°. **1 bod**


$\boldsymbol{I}_2$
$\boldsymbol{U}_R$
φ_2
$\boldsymbol{U}_C$
$\boldsymbol{U}$

Obr. R1


$\boldsymbol{I}_C$
$\boldsymbol{I}$
φ_4
$\boldsymbol{I}_R$
$\boldsymbol{U}$

Obr. R2

3. a) Označme m hmotnost celého tělesa a m_1 hmotnost výseče se středovým úhlem 2β. Platí

$$y_T = \frac{m_1 \cdot \frac{2r}{3}\sin\alpha + (m - m_1)\cdot 0}{m} =$$

$$= \frac{2r\sin\alpha}{3}\cdot\frac{m_1}{m} = \frac{2r\sin\alpha}{3}\cdot\frac{2\beta}{2\alpha} = d\sin\beta \approx d\cdot\beta.$$

Z toho $d = \dfrac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$.

5 bodů

b) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s rotujícím excentrem. Počátek zvolíme na ose motorku, osa x prochází těžištěm (obr. R3). Na náhodně zvolený element působí odstředivá síla $\boldsymbol{F}_i = m_i\omega^2\boldsymbol{r}_i$. Výsledná odstředivá síla je

$$\boldsymbol{F} = \sum m_i\omega^2\boldsymbol{r}_i = \omega^2\sum m_i\boldsymbol{r}_i = \omega^2 m\boldsymbol{r}_T,$$

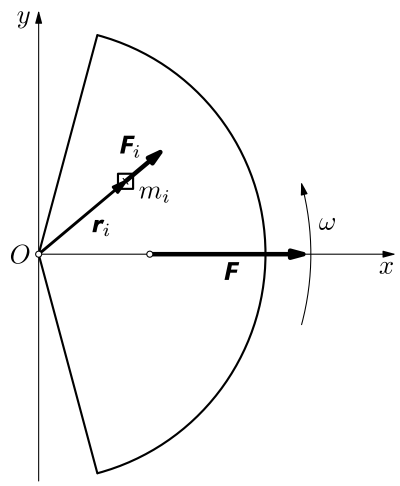
kde m je celková hmotnost excentru a $\boldsymbol{r}_T$ je polohový vektor těžiště. Vzhledem k souměrnosti excentru působí výsledná odstředivá síla $\boldsymbol{F}$ v ose x a má velikost

$$F = \omega^2 m x_T = \omega^2 m d.$$

Hmotnost excentru je $m = \alpha r^2 h\varrho$ a velikost výsledné odstředivé síly je

$$F = 4\pi^2 f^2\cdot\frac{2}{3}h\varrho r^3\sin\alpha = 0{,}17\ \mathrm{N}.$$

5 bodů



Obr. R3

Alternativní řešení úkolu a) užitím integrálního počtu:

Válcovou výseč umístěnou v základní poloze rozdělíme na elementární válcové výseče s malým středovým úhlem $\mathrm{d}\varphi$ (obr. R4). Těžiště T_i elementární výseče má x-ovou souřadnici

$$x_i = \frac{2}{3} r \cos\varphi,$$

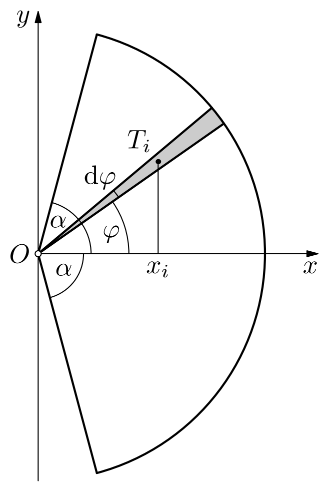
hmotnost elementární výseče je

$$\mathrm{d}m = m\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha}.$$

Pro x-ovou souřadnici těžiště celého tělesa platí

$$x_T = \frac{1}{m}\int_m x \cdot \mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} r\cos\varphi \cdot \frac{m}{2\alpha}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{r}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}.$$



Obr. R4

4. a) $f_0 = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ Hz.

1 bod

b) Při n-tém průchodu rezonátorem se kinetická energie elektronu zvětší na

$$E_\mathrm{k} = nE_0 = n \cdot m_0 c^2$$

a hmotnost elektronu se zvětší na

$$m = m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2} = (n+1)m_0.$$

Dostředivou silou při pohybu elektronu je síla magnetická. Platí

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Ber}{m} = \frac{Ber}{(n+1)m_0} = 2\pi rf. \tag{1}$$

$$f = \frac{Be}{2\pi(n+1)m_0} = \frac{f_0}{n+1} \quad \Rightarrow \quad T = (n+1)T_0.$$

3 body

c) Po n-tém průchodu rezonátorem je celková energie elektronu

$$E = (n+1)m_0 c^2.$$

Pro $n = 40$ dostaneme $E = 3{,}4 \cdot 10^{-12}$ J $= 21$ MeV.

Doba n-tého oběhu je $T = \dfrac{n+1}{f_0} = \dfrac{2\pi(n+1)m_0}{Be}$.

Pro dané hodnoty $T = 3{,}7 \cdot 10^{-9}$ s.

2 body

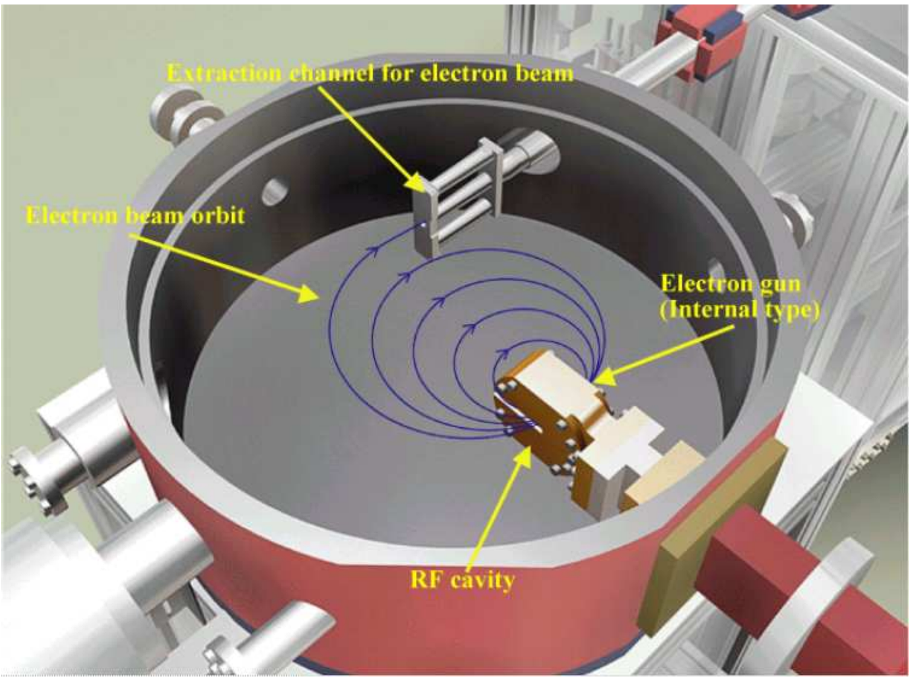
Z (1) vyjádříme hybnost elektronu $p = mv = Ber$. Ze vztahu mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice po n-tém oběhu platí:

$$E^2 = [(n+1)E_0]^2 = E_0^2 + p^2c^2 = E_0^2 + (Berc)^2,$$

$$r = \frac{E_0}{Bec}\sqrt{(n+1)^2 - 1} = \frac{m_0 c}{Be}\sqrt{n^2 + 2n}.$$

Pro dané hodnoty $r = 17$ cm.

4 body



Obrázek převzat z publikace *Urychlovače nabitých částic* od doc. Z. Doležala z MFF.