Řešení úloh krajského kola 52. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3), I. Volf a M. Jarešová (4),

1. a) Poměr kinetických energií prvního a druhého vagónu je

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot(2v)^2}=\frac{1}{2}.$$

tedy druhý vagón má dvakrát větší kinetickou energii než první vagón.

1 bod

b) Směry hybností vagónů před srážkou jsou navzájem opačné, podle ZZH platí:

$$mv-\frac{m}{2}\cdot 2v=\left(m+\frac{m}{2}\right)u.$$

Z rovnice plyne $u = 0$, souprava zůstane v klidu. Při srážce ztratí oba vagóny veškerou kinetickou energii.

3 body

c) Směry hybností vagónů před srážkou jsou shodné, podle ZZH platí:

$$mv+\frac{m}{2}\cdot 2v=\left(m+\frac{m}{2}\right)u$$

Z rovnice plyne $u=\frac{4}{3}v.$

3 body

Označme E_k kinetickou energii obou vagónů před srážkou a E'_k kinetickou energii soupravy vagónů po srážce. Pak platí:

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}}=\frac{\frac{1}{2}\left(m+\frac{m}{2}\right)u^2}{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{m}{2}(2v)^2}=\frac{\frac{3}{4}m\left(\frac{4}{3}v\right)^2}{\frac{3}{2}mv^2}=\frac{8}{9}.$$

Původní celková kinetická energie obou vagónů se při srážce zmenší o $\frac{1}{9}$.

3 body

2. a) Z grafu získáme velikost zrychlení na každém úseku:

$$a_1 = \frac{11{,}6 - 8{,}4}{4 - 0} \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \quad a_2 = \frac{8{,}4 - 0}{11 - 4} \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

b) Zrychlení je způsobeno brzdící třecí silou, pro kterou platí $F_\mathrm{t} = ma = fmg$.

Ze vztahu plyne $f_1 = \dfrac{a_1}{g} = 0{,}08, \quad f_2 = \dfrac{a_2}{g} = 0{,}12.$ **2 body**

c) Dráhu na prvním a druhém úseku určíme jako obsah plochy pod grafem:

$$s_1 = \left(8{,}4 \cdot 4 + \frac{(11{,}6 - 8{,}4) \cdot 4}{2}\right)\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{m}, \quad s_2 = \frac{(8{,}4 - 0) \cdot 7}{2}\ \mathrm{m} = 29\ \mathrm{m}.$$

Celková dráha puku je $s = s_1 + s_2 = 69$ m. **1 bod**

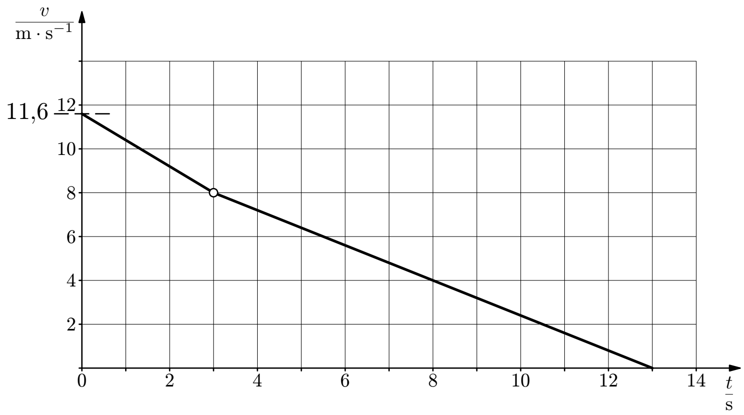
d) Při pohybu tam i zpět působila na odpovídajících drahách brzdící síla stejné velikosti, která vzhledem ke stejné počáteční rychlosti puku, a tedy stejné počáteční kinetické energii, vykonala stejnou práci - proto puk při cestě zpět urazil stejnou celkovou dráhu. Puk při cestě zpět urazil nejprve dráhu s_2 se zrychlením $\boldsymbol{a}_2$, poté dráhu s_1 se zrychlením $\boldsymbol{a}_1$. K sestrojení grafu musíme zjistit obě doby pohybu a velikost rychlosti při vstupu do hřiště.

Doba pohybu v druhé fázi je $\Delta t_2 = \sqrt{\dfrac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 40}{0{,}8}}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}.$

Při vstupu do hřiště měl puk rychlost o velikosti

$$v = a_1 \Delta t_2 = 0{,}8 \cdot 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Doba pohybu v první fázi $\Delta t_1 = \dfrac{v_0 - v}{a_2} = \dfrac{11{,}6 - 8}{1{,}2}\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{s}.$ **3 body**



2 body

3. a) Z hlediska pasažéra je setrvačná odstředivá síla v rovnováze se silou tíhovou:

$$mg = mr\omega^2, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Z rovnic plyne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 3{,}1 \text{ s.} \tag{1}$$

3 body

b) Okamžitý výkon je maximální při průchodu ramen vodorovnou polohou, kdy se lavice s pasažéry pohybuje svisle vzhůru, a to silou stejné velikosti jako tíhová síla. Maximální okamžitý výkon je

$$P_{\max} = m_0 g v, \quad \text{kde} \quad v = r\omega = r\frac{2\pi}{T}.$$

Dále užijeme vztah (1). Po dosazení dostaneme

$$P_{\max} = m_0\sqrt{g^3 r} = 38 \text{ kW.}$$

3 body

c) V nejvyšší poloze je

$$F_{\min} = mg - mr\omega^2, \quad \text{kde} \quad \omega = 2\pi f.$$

Po dosazení dostaneme

$$F_{\min} = mg - mr \cdot 4\pi^2 f^2 = m(g - 4\pi^2 f^2 r) = 360 \text{ N.}$$

Podobně v nejnižší poloze je

$$F_{\max} = mg + mr \cdot 4\pi^2 f^2 = m(g + 4\pi^2 f^2 r) = 820 \text{ N.}$$

4 body

Poznámka: Velikosti sil lze také zapsat jako násobek tíhové síly:

$$F_{\max,\min} = mg \pm mr \cdot 4\pi^2 f^2 = mg\left(1 \pm \frac{4\pi^2 f^2 r}{g}\right).$$

v úloze vyjde $F_{\min} = 0{,}61mg$, $F_{\max} = 1{,}39mg$.

4. a) Pro dráhu l ujetou sáňkařem při sjíždění ze svahu platí

$$l = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f_1\cos\alpha)t_1^2,$$

z čehož

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f_1\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100}{9{,}81\cdot(\sin 10^\circ - 0{,}05\cdot\cos 10^\circ)}}\ \mathrm{s} = 12{,}8\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Za změněných sněhových podmínek můžeme obdobně jako v úloze a) psát

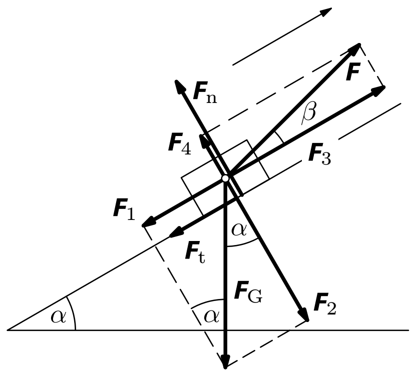
$$l = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f_2\cos\alpha)t_2^2,$$

z čehož

$$f_2 = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{2l}{gt_2^2\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,10^\circ - \frac{2\cdot 100}{9{,}81\cdot 12{,}0^2\cdot\cos 10^\circ} = 0{,}03.$$

2 body

c) Nejprve provedeme rozbor úlohy, tj. zakreslíme síly a provedeme jejich rozklad do dvou navzájem kolmých směrů (obr. R1).



Obr. R1

Z obr. R1 platí ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou $F_1 + F_\mathrm{t} - F_3 = 0$, ve směru kolmém na nakloněnou rovinu $F_2 - F_4 - F_\mathrm{n} = 0$. Tyto rovnice ještě doplníme vztahem pro výpočet třecí síly $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n}\cdot f_1$.
Po dosazení z obr. R1

$$mg\sin\alpha + F_\mathrm{n}\cdot f_1 - F\cos\beta = 0,$$
$$mg\cos\alpha - F\sin\beta - F_\mathrm{n} = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$F = mg\frac{\sin\alpha + f_1\cos\alpha}{\cos\beta + f_1\sin\beta} = 4{,}5\cdot 9{,}81\cdot\frac{\sin 10^\circ + 0{,}05\cdot\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ + 0{,}05\cdot\sin 40^\circ}\ \mathrm{N} = 12{,}3\ \mathrm{N}.$$

5 bodů