Řešení úloh 1. kola 52. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3), J. Thomas (4), P. Šedivý (5, 6),
M. Jarešová a I. Volf (7).

1. a) Z rovnice $a = \dfrac{v_1 - v_2}{\Delta t_1}$ plyne

$$\Delta t_1 = \frac{v_1 - v_2}{a} = 25\ \mathrm{s}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Pro dráhu platí $s = v_1 \Delta t_1 - \dfrac{1}{2} a (\Delta t_1)^2$.

Po dosazení vztahu (1) a po úpravě dostaneme $s = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2a}$.

K témuž výsledku můžeme dospět též z rovnosti práce brzdící síly a změny kinetické energie vlaku:

$$W = Fs = ma \cdot s = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2\,.$$

Číselně vychází 440 m. **3 body**

c) Doba jízdy je $\Delta t_2 = \dfrac{d + l}{v_2} = 48$ s. **2 body**

d) Pro výkon platí $P = \dfrac{\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2}{\Delta t_3}$.

Z rovnice plyne $\Delta t_3 = \dfrac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2P}$.

Číselně vychází $\Delta t_3 = 49$ s. **3 body**

2. a) Zvolme v rovině trajektorie míčku soustavu souřadnic s počátkem na základní čáře pod míčkem. Pak pro souřadnice míčku během letu platí:

$$x = v_0 t, \tag{1}$$

$$y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Dosazením $y = 0$, $t = t_1$ do rovnice (2) dostaneme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \tag{3}$$

Dosazením t_1 do rovnice (1) dostaneme

$$v_{01} = d_1 \sqrt{\frac{g}{2h_0}}.$$

Vodorovná složka rychlosti je konstantní, proto se míček octne nad sítí v čase $\frac{t_1}{2}$. Dosazením $t = \frac{t_1}{2}$ a $y = h_\mathrm{s} + \Delta h$ do rovnice (2) a užitím rovnice (3) dostaneme:

$$\Delta h = \frac{3}{4} h_0 - h_\mathrm{s}.$$

Číselně vychází $t_1 = 0{,}53$ s, $v_{01} = 44{,}5 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta h = 0{,}14$ m.

6 bodů

b) Vyloučením času t z rovnic (1) a (2) dostaneme rovnici trajektorie

$$y = h_0 - \frac{g}{2v_{02}^2} x^2.$$

Dosazením $x = \frac{d_1}{2} = 11{,}89$ m dostaneme v okamžiku průchodu míčku rovinou sítě výšku míčku nad kurtem 0,63 m, tedy míček skončí v síti.

2 body

c) Dosazením $x = \frac{d_1}{2}$, $y = h_\mathrm{s}$, $v_0 = v_\mathrm{min}$ do rovnice trajektorie dostaneme

$$v_\mathrm{min} = d_1 \sqrt{\frac{g}{8(h_0 - h_\mathrm{s})}}.$$

Číselně vychází $v_\mathrm{min} = 37{,}6 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 body

3. a) Z kalorimetrické rovnice

$$mc_2(0 - t_2) + ml_\mathrm{t} + mc_1(t - 0) = (m_0 - m)c_1(t_1 - t)$$

plyne

$$m = \frac{m_0 c_1 (t_1 - t)}{c_1 t_1 + l_\mathrm{t} - c_2 t_2}. \tag{4}$$

Pro dané hodnoty vychází $m = 0{,}11$ kg.

3 body

b) Úpravou (4) na tvar

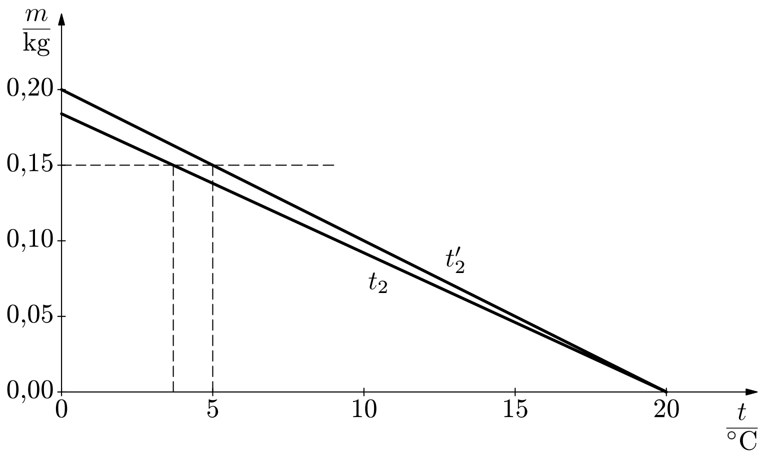
$$m = \frac{m_0 c_1 t_1}{c_1 t_1 + l_\mathrm{t} - c_2 t_2} - \frac{m_0 c_1}{c_1 t_1 + l_\mathrm{t} - c_2 t_2} t$$

a dosazením číselných hodnot dostaneme pro $t_2 = -18$ °C funkci

$$\{m\} = 0{,}184 - 0{,}009\,18\{t\},$$

pro $t_2' = 0$ °C funkci

$$\{m\} = 0{,}200 - 0{,}010\,0\{t\}.$$



Obr. R1

4 body

c) Z grafu vyčteme hodnotu 3,7 °C pro teplotu ledu $t_2 = -18$ °C a 5,0 °C pro teplotu ledu $t_2' = 0$ °C.

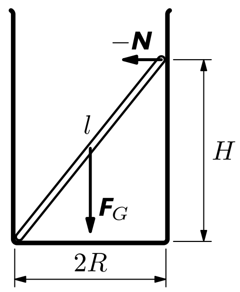
3 body

4. a) Na horní konec tyčinky působí reakce stěny $-\boldsymbol{N}$ (obr. R2). Podle momentové věty vzhledem k dolnímu konci tyčinky platí

$$mgR = NH = N\sqrt{l^2 - 4R^2},$$

$$N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2 - 4R^2}} = 0{,}065\ \mathrm{N}.$$

2 body



Obr. R2

b) Nyní musíme přihlížet (obr. R3) ještě k vztlakové síle o velikosti

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{k}} \frac{h}{H} V g = \varrho_{\mathrm{k}} \frac{h}{H} \cdot \frac{m}{\varrho} g = \frac{\varrho_{\mathrm{k}} h m g}{\varrho\sqrt{l^2 - 4R^2}},$$

která má rameno

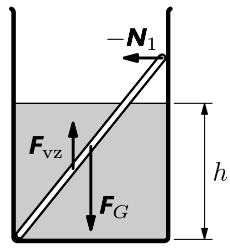
$$R\frac{h}{H} = \frac{Rh}{\sqrt{l^2 - 4R^2}}.$$

Podle momentové věty vzhledem k dolnímu konci tyčinky je

$$mgR - \frac{mg\varrho_{\mathrm{k}} h^2 R}{\varrho(l^2 - 4R^2)} - N_1\sqrt{l^2 - 4R^2} = 0,$$

$$\varrho = \frac{mg\varrho_{\mathrm{k}} R \dfrac{h^2}{(l^2 - 4R^2)}}{mgR - N_1\sqrt{l^2 - 4R^2}} = 2\,950\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

5 bodů



Obr. R3

c) Vztlaková síla nyní působí v těžišti (obr. R4) a má velikost

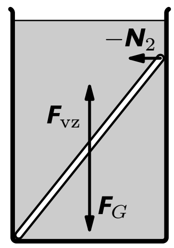
$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{k}} V g = \varrho_{\mathrm{k}} \frac{m}{\varrho} g.$$

Platí

$$\left(mg - mg\frac{\varrho_{\mathrm{k}}}{\varrho}\right) R - N_2\sqrt{l^2 - 4R^2} = 0,$$

$$N_2 = \frac{mgR\left(1 - \dfrac{\varrho_{\mathrm{k}}}{\varrho}\right)}{\sqrt{l^2 - 4R^2}} = 0{,}043\ \mathrm{N}.$$

3 body



Obr. R4

5. a) Střední kvadratické rychlosti molekul v komoře a v jejím okolí jsou

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \qquad v_\mathrm{k1} = \sqrt{\frac{3kT_1}{m_0}},$$

kde m_0 je hmotnost molekuly a k Boltzmannova konstanta. Z toho

$$\frac{v_\mathrm{k1}}{v_\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{T_1}{T}} = 2.$$

Pro určení hustot molekul použijeme zjednodušující úvahu: Budeme předpokládat, že všechny molekuly v komoře se pohybují stejně velkou rychlostí v_k1 ve třech navzájem kolmých směrech, z nichž jeden je kolmý ke stěně s otvorem. Za tohoto předpokladu se v každém okamžiku uvnitř komory v blízkosti otvoru pohybuje směrem ven jedna šestina molekul. Za dobu Δt uniknou ven molekuly plynu obsažené v objemu $Sv_\mathrm{k1}\Delta t$, kde S je plošný obsah otvoru. Jejich počet je $\frac{1}{6}N_{V1}Sv_\mathrm{k1}\Delta t$. Stejnou úvahou odvodíme, že za tutéž dobu proniknou do komory z okolí molekuly plynu v počtu $\frac{1}{6}N_V S v_\mathrm{k}\Delta t$. Z rovnosti obou výrazů plyne

$$\frac{N_{V1}}{N_V} = \frac{v_\mathrm{k}}{v_\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}.$$

4 body

b) Stavovou rovnici pro plyn v okolí komory můžeme napsat ve tvaru $p = N_V kT$ a pro plyn uvnitř komory $p_1 = N_{V1}kT_1$. Z toho

$$\frac{p_1}{p} = \frac{N_{V1}}{N_V}\cdot\frac{T_1}{T} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2, \qquad p_1 = 2p.$$

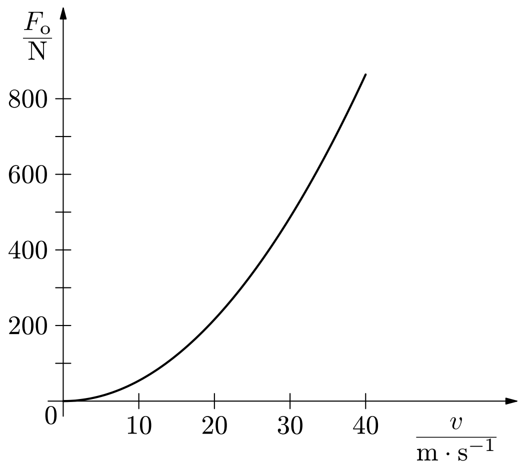
4 body

c) Hustoty plynu uvnitř a vně komory jsou ve stejném poměru jako hustoty molekul:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{N_{V1}}{N_V} = \frac{1}{2}.$$

2 body

7. a) Odporová síla je dána vztahem $F_\mathrm{o} = kv^2$, kde $k = \frac{1}{2} C S \varrho$ pro dané hodnoty $k = \frac{1}{2} \cdot 0{,}36 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}25\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2} = 0{,}54\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2}$, interval rychlostí je od 0 do $40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Obr. R5

2 body

b) Je-li rychlost $110\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, potom $F_{\mathrm{o}1} = 0{,}54 \cdot \left(\frac{110}{3{,}6}\right)^2\ \mathrm{N} = 504\ \mathrm{N}$,
$W_1 = F_{\mathrm{o}1} \cdot s = 50{,}4\ \mathrm{MJ}$.
Je-li rychlost $130\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, potom $F_{\mathrm{o}2} = 0{,}54 \cdot \left(\frac{130}{3{,}6}\right)^2\ \mathrm{N} = 704\ \mathrm{N}$,
$W_2 = F_{\mathrm{o}2} \cdot s = 70{,}4\ \mathrm{MJ}$.

1 bod

c) Spotřebu benzínu na 100 km v litrech určíme pomocí vztahu: $V = \frac{W}{\eta \cdot H}$.
V prvním případě $V_1 = \frac{50{,}4 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}\ \mathrm{l} = 7{,}6\ \mathrm{l}$, ve druhém případě $V_2 = \frac{70{,}4 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}\ \mathrm{l} = 10{,}7\ \mathrm{l}$. Čas ušetřený rychlejší jízdou

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \left(\frac{100 \cdot 10^3}{\frac{110}{3{,}6}} - \frac{100 \cdot 10^3}{\frac{130}{3{,}6}} \right)\ \mathrm{s} = 503\ \mathrm{s} = 8\ \mathrm{min}\ 23\ \mathrm{s}.$$

2 body

d) Valivý odpor $F_\mathrm{v} = \xi \dfrac{mg}{r} = 0{,}002 \cdot \dfrac{1\,500 \cdot 9{,}81}{\frac{0{,}55}{2}}$ N = 107 N.

Při 110 km · h^{-1} je F_1 = (504 + 107) N = 611 N, práce W_1 = 61,1 MJ, spotřeba benzínu $V_1 = \dfrac{61{,}1 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 9,3 l.

Při 130 km · h^{-1} je F_2 = (704 + 107) N = 811 N, práce W_2 = 81,1 MJ, spotřeba benzínu $V_2 = \dfrac{81{,}1 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 12,3 l.

2 body

e) Úprava tvarového součinitele odporu $k' = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}30 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}25\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2} =$

$= 0{,}45\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2}$: $F_{\mathrm{o}1} = 0{,}45 \cdot \left(\dfrac{110}{3{,}6}\right)^2$ N = 420 N,

$W_1 = (420 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 52,7 MJ, $V_1 = \dfrac{52{,}7 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 8,0 l.

$F_{\mathrm{o}2} = 0{,}45 \cdot \left(\dfrac{130}{3{,}6}\right)^2$ N = 587 N,

$W_2 = (587 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 69,4 MJ, $V_2 = \dfrac{69{,}4 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 10,5 l.

Zlepšení účinnosti spalování: $F_{\mathrm{o}1} = 0{,}54 \cdot \left(\dfrac{110}{3{,}6}\right)^2$ N = 504 N,

$W_1 = (504 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 61,1 MJ, $V_1 = \dfrac{61{,}1 \cdot 10^6}{0{,}24 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 7,7 l.

$F_{\mathrm{o}2} = 0{,}54 \cdot \left(\dfrac{130}{3{,}6}\right)^2$ N = 704 N,

$W_2 = (704 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 81,1 MJ, $V_2 = \dfrac{81{,}1 \cdot 10^6}{0{,}24 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 10,2 l.

Obojí současně: $F_{\mathrm{o}1} = 0{,}45 \cdot \left(\dfrac{110}{3{,}6}\right)^2$ N = 420 N,

$W_1 = (420 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 52,7 MJ, $V_1 = \dfrac{52{,}7 \cdot 10^6}{0{,}24 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 6,7 l.

$F_{\mathrm{o}2} = 0{,}45 \cdot \left(\dfrac{130}{3{,}6}\right)^2$ N = 587 N,

$W_2 = (587 + 107) \cdot 100 \cdot 10^3$ J = 69,4 MJ, $V_2 = \dfrac{69{,}4 \cdot 10^6}{0{,}24 \cdot 33 \cdot 10^6}$ l = 8,8 l.

3 body