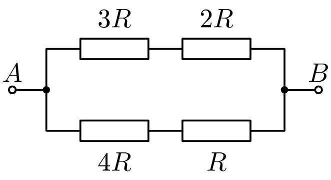
Řešení úloh krajského kola 52. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 3), J. Thomas (2), P. Šedivý (4)

1. a) Když je spínač rozepnut, potom je možno obvod z obr. 1 překreslit na obr. R1.



Obr. R1

Celkový odpor obvodu určíme pomocí vztahu

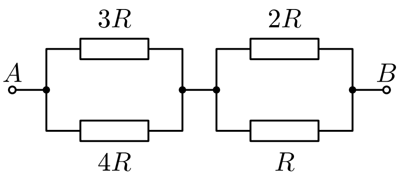
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{3R + 2R} + \frac{1}{4R + R},$$

z čehož $R_{AB} = \frac{5}{2}R.$

2 body

Když je spínač sepnut, je možno obvod z obr. 1 překreslit tak, jak je uvedeno na obr. R2. Celkový odpor obvodu určíme pomocí vztahu

$$R'_{AB} = R_1 + R_2 = \frac{12}{7}R + \frac{2}{3}R = \frac{50}{21}R.$$



Obr. R2

R_1 a R_2 jsme určili níže:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{4R},$$

z čehož $R_1 = \frac{12}{7}R$, obdobně

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R},$$

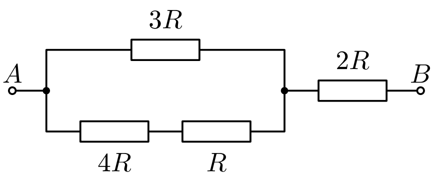
z čehož $R_2 = \frac{2}{3}R.$

2 body

Z výrazu $R_{AB} = \frac{5}{2}R$ můžeme vyjádřit $R = \frac{2}{5}R_{AB}$ a dosadit do výrazu $R'_{AB} = \frac{50}{21}R$. Dostaneme $R'_{AB} = \frac{50}{21} \cdot \frac{2}{5}R_{AB} = \frac{50}{21} \cdot \frac{2}{5} \cdot 105\ \Omega = 100\ \Omega.$

1 bod

b) Je-li spínač rozepnut, pak je obvod možno překreslit podle obr. R3.



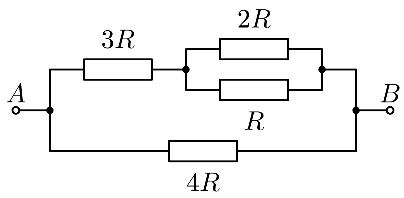
Obr. R3

Označme R_1 celkový odpor levé části obvodu na obr. R3. Platí

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{5R}, \quad \text{z čehož} \quad R_1 = \frac{15}{8}R.$$

Potom $R_{AB} = R_1 + 2R = \dfrac{31}{8}R.$ **2 body**

Je-li spínač sepnut, pak je obvod možno překreslit podle obr. R4.



Obr. R4

Pak platí $\dfrac{1}{R'_{AB}} = \dfrac{1}{4R} + \dfrac{1}{3R + \frac{2}{3}R}$, z čehož $R'_{AB} = \dfrac{44}{23}R.$

2 body

Poměr $\dfrac{R_{AB}}{R'_{AB}} = \dfrac{\frac{31}{8}R}{\frac{44}{23}R} = 2{,}03.$

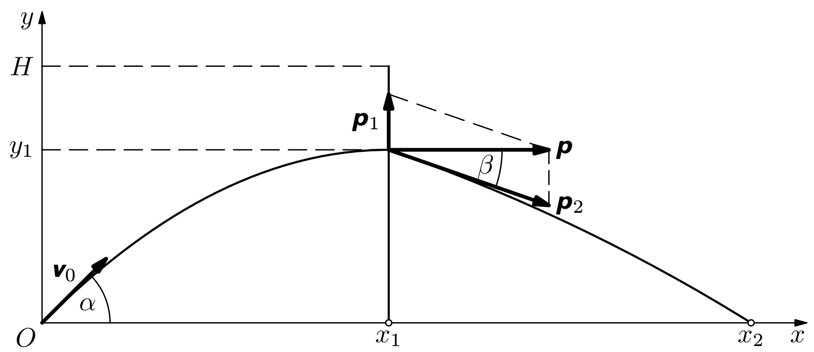
1 bod

2. Zvolme souřadnou soustavu s počátkem v místě výstřelu (obr. R5). Do nejvyššího bodu své trajektorie vystoupil granát za dobu $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = 10{,}8\ \mathrm{s}$ a měl zde souřadnice

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 1\,147\ \mathrm{m} \qquad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 573\ \mathrm{m}.$$

První část granátu vystoupila po explozi kolmo vzhůru do výšky H. Její počáteční rychlost měla velikost $u_1 = \sqrt{2(H - y_1)g} = 73{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, doba výstupu $t_\mathrm{v} = \sqrt{\dfrac{2(H-y_1)}{g}} = 7{,}5\ \mathrm{s}$, doba sestupu $t_\mathrm{s} = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 13{,}2\ \mathrm{s}$.

Tato část granátu dopadla za dobu $t_1 + t_\mathrm{v} + t_\mathrm{s} = 31{,}5\ \mathrm{s}$ ve vzdálenosti $x_1 = 1\,147\ \mathrm{m}$ od místa výstřelu. **3 body**



Obr. R5

Označme $\boldsymbol{p}$ hybnost granátu v nejvyšším bodě trajektorie těsně před jeho roztržením. Rychlost druhé části granátu po explozi určíme užitím zákona zachování hybnosti. Hybnost první části má velikost $p_1 = \dfrac{m}{2}u_1$ a směr svisle vzhůru, hybnost druhé části má velikost $p_2 = \dfrac{m}{2}u_2$ a svírá s hybností $\boldsymbol{p}$ úhel β. Platí

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2} = \sqrt{(mv_0\cos\alpha)^2 + 2(H-y_1)g\frac{m^2}{4}},$$

$$u_2 = \frac{2p_2}{m} = 2\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + \frac{(H-y_1)g}{2}} = 225\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$\sin\beta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1}{u_2}, \qquad \beta = 19{,}15°.$$

3 body

Pohyb druhé části granátu po explozi popisují rovnice

$$x = x_1 + u_2 \cos\beta \cdot (t - t_1), \qquad y = y_1 - u_2 \sin\beta \cdot (t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2.$$

Čas dopadu t_2 určíme řešením kvadratické rovnice

$$y_1 - u_2 \sin\beta \cdot (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g (t_2 - t_1)^2 = y_1 - u_1 \cdot (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g (t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$t_2 - t_1 = \frac{-\,u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2 g y_1}}{g} = 5{,}7 \text{ s}.$$

Druhá část granátu dopadne v čase $t_2 = 16{,}5$ s ve vzdálenosti

$$x_2 = x_1 + u_2 \cos\beta (t_2 - t_1) = 2\,350 \text{ m}$$

od místa výstřelu.

4 body

3. a) Na počátku je kulička v rovnovážné poloze, kdy platí $mg = k\Delta l$, z čehož

$$\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}.$$

Doba kmitu závaží na pružině je dána vztahem

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}10}{9{,}81}}\ \mathrm{s} = 0{,}63\ \mathrm{s}.$$

2 body

b) Z rovnosti $mg = k\Delta l$ dostaneme

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \varrho g}{\Delta l} = \frac{\pi D^3 \varrho g}{6\Delta l}.$$

Pro dané hodnoty: $k = \dfrac{\pi \cdot 0{,}025^3 \cdot 7\,800 \cdot 9{,}81}{6 \cdot 0{,}10}\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} = 6{,}3\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}.$

2 body

c) Pro plnou kouli platí $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}$, pro dutou kouli $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}$. Poměr dob kmitů je pak dán vztahem

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right]\varrho}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \varrho}} = \sqrt{\frac{D^3 - d^3}{D^3}}.$$

Potom $\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^3$, z čehož $d = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}D = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \cdot 25\ \mathrm{mm} = 22{,}7\ \mathrm{mm}.$

3 body

d) Pro dobu kmitu plné kuličky platí $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}$, pro obě kuličky zavěšené zároveň platí $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{k}}$. Dále platí

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^2 = \frac{4\pi^2\frac{m_1}{k} + 4\pi^2\frac{m_2}{k}}{4\pi^2\frac{m_1}{k}} = 1 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2,$$

z čehož

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = 1{,}12.$$

3 body

4. a) Ze vztahu

$$l = l_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = l_0 + \Delta l$$

vyjádříme relativní prodloužení:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\,.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$:

$$\begin{aligned} 100\{\alpha_1\} + 1 \cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0{,}00120\,, \\ 200\{\alpha_1\} + 4 \cdot 10^4\{\alpha_2\} &= 0{,}00251\,. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\{\alpha_1\} = 1{,}145 \cdot 10^{-5}\,, \quad \{\alpha_2\} = 5{,}5 \cdot 10^{-9}\,,$$

$$\alpha_1 = 1{,}145 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,, \quad \alpha_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

5 bodů

b) Závislost objemu na teplotě vyjadřuje vztah, který odvodíme pro těleso krychlového tvaru:

$$V = l^3 = l_0^3\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0\left(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right)\,.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty $\{\beta_1\}$, $\{\beta_2\}$:

$$\begin{aligned} 1 + 100\{\beta_1\} + 1 \cdot 10^4\{\beta_2\} = (1 + 0,00120)^3 &= 1{,}003604322\,, \\ 1 + 200\{\beta_1\} + 4 \cdot 10^4\{\beta_2\} = (1 + 0,00251)^3 &= 1{,}007548916\,. \end{aligned}$$

Řešením dostaneme:

$$\{\beta_1\} = 3{,}434 \cdot 10^{-5}\,, \quad \{\beta_2\} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,,$$

$$\beta_1 = 3{,}434 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,, \quad \beta_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

5 bodů

Jiné řešení úlohy b): Vyjdeme ze vztahu

$$V_0(1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)^3 = V_0[1+3(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)+3(\alpha_1^2 t^2+2\alpha_1\alpha_2 t^3+(\alpha_2^2 t^4)+(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)^3]$$

Zanedbáním členů třetího a vyšších řádů dostaneme:

$$V_0[1 + 3\alpha_1 t + 3(\alpha_2 + \alpha_1^2)t^2] \approx V_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)\,,$$

$$\beta_1 = 3\alpha_1 = 3{,}435 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\,, \qquad \beta_2 = 3(\alpha_2 + \alpha_1^2) = 1{,}69 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-2}\,.$$

Výsledky získané oběma způsoby se prakticky shodují.