Řešení úloh 1. kola 51. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Doba první jízdy na první čtvrtině trati je

$$t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{v_1} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 48}{60}\ \mathrm{h} = \frac{12}{60}\ \mathrm{h} = 12\ \mathrm{min}$$

a na zbývající části trati $t_2 = \dfrac{\frac{3}{4}s}{v_2} = \dfrac{\frac{3}{4}\cdot 48}{36}\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{h}.$

Celková doba první jízdy je $t = t_1 + t_2 = 1\ \mathrm{h}\ 12\ \mathrm{min} = \dfrac{72}{60}\ \mathrm{h}.$

Průměrná rychlost pak je $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{48}{\frac{72}{60}}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 40\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$

3 body

b) V opačném směru je celková doba jízdy $t' = \dfrac{s}{v'_\mathrm{p}} = \dfrac{48}{45}\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{h}\ 4\ \mathrm{min}.$

Doba jízdy na uvažované čtvrtině trati se nezměnila, nová doba jízdy na zbývající části trati je

$$t'_2 = t' - t_1 = 52\ \mathrm{min} = \frac{52}{60}\ \mathrm{h}.$$

Hledaná průměrná rychlost na delší části trati je

$$v'_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{t'_2} = \frac{\frac{3}{4}\cdot 48}{\frac{52}{60}}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 41{,}5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

3 body

c) Při první jízdě je průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{0{,}25s}{v_1} + \frac{0{,}75s}{v_2}} = \frac{4v_1v_2}{3v_1 + v_2} = 40\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Při zpáteční jízdě je

$$v'_\mathrm{p} = \frac{s}{t'} = \frac{s}{\frac{0{,}75s}{v'_2} + \frac{0{,}25s}{v'_1}} = \frac{4v'_1v'_2}{3v'_1 + v'_2} = 45\ \mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

z čehož vyjádříme v'_2:

$$v'_2 = \frac{3v'_1v'_\mathrm{p}}{4v'_1 - v'_\mathrm{p}} = 41{,}5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

4 body

2. a) Jízda každé tramvaje se skládá ze tří pohybů. Označme dráhu, čas a zrychlení při rozjíždění indexem 1, při brzdění indexem 3, dráhu a čas rovnoměrného pohybu indexem 2 a celkovou dráhu a celkový čas bez indexu. Druhou tramvaj odlišíme od první očárkováním příslušné veličiny. Doby rozjíždění a dráhy uražené při rozjíždění jsou

$$t_1 = \frac{v}{a_1} = \frac{12}{1{,}2}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}, \qquad t_1' = \frac{v}{a_1'} = \frac{12}{1{,}5}\ \mathrm{s} = 8\ \mathrm{s},$$

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}2 \cdot 10^2\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{m},$$

$$s_1' = \frac{1}{2}a_1' t_1'^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}5 \cdot 8^2\ \mathrm{m} = 48\ \mathrm{m}.$$

Z maximální rychlosti a brzdné dráhy první tramvaje určíme dobu brzdění. Z rovnic

$$s_3 = \frac{1}{2}a_3 t_3^2, \qquad v = a_3 t_3$$

dostaneme

$$t_3 = \frac{2s_3}{v} = \frac{2\cdot 54}{12}\ \mathrm{s} = 9\ \mathrm{s}.$$

Dráha a doba rovnoměrného pohybu první tramvaje jsou

$$s_2 = s - s_1 - s_3 = (594 - 60 - 54)\ \mathrm{m} = 480\ \mathrm{m},$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{480}{12}\ \mathrm{s} = 40\ \mathrm{s}.$$

Druhá tramvaj se rozjížděla se zpožděním Δt, brzdit začala ve stejném okamžiku jako první tramvaj. Doba a dráha rovnoměrného pohybu druhé tramvaje jsou

$$t_2' = t_1 + t_2 - t_1' - \Delta t = (10 + 40 - 8 - 4)\ \mathrm{s} = 38\ \mathrm{s},$$

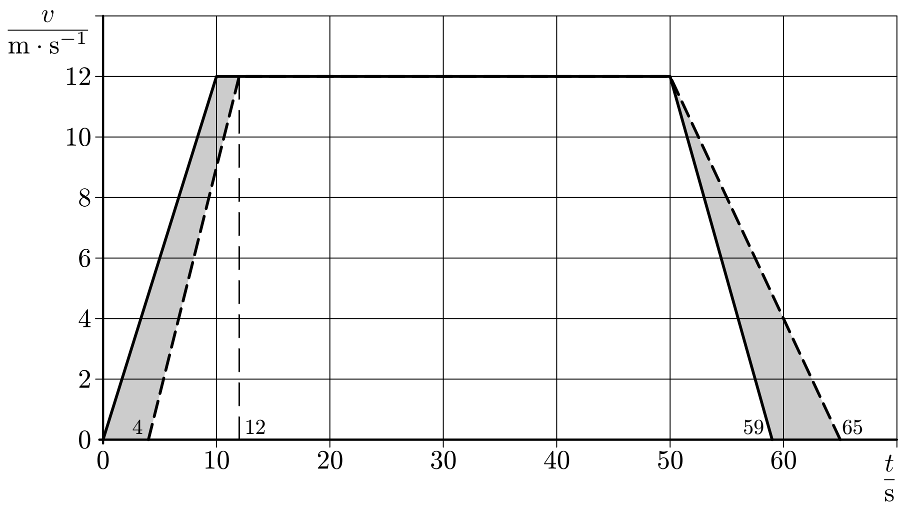
$$s_2' = t_2' v = 38 \cdot 12\ \mathrm{m} = 456\ \mathrm{m}.$$

Brzdná dráha druhé tramvaje a doba brzdění

$$s_3' = s - s_1' - s_2' = (594 - 48 - 456)\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{m},$$

$$t_3' = \frac{2s_3'}{v} = \frac{2\cdot 90}{12}\ \mathrm{s} = 15\ \mathrm{s}.$$

5 bodů



3 body

b) Maximální vzdálenost d tramvají je dána obsahem lichoběžníku nebo trojúhelníku

$$d = \frac{[4 + (12 - 10)] \cdot 12}{2}\ \mathrm{m} = \frac{(65 - 59) \cdot 12}{2}\ \mathrm{m} = 36\ \mathrm{m}.$$

2 body

3. a) Velikost zrychlení automobilu s upevněným nákladem je

$$a = \frac{v_0}{t} = \frac{6}{12}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Velikost zrychlení s uvolněným nákladem je

$$a_1 = \frac{F}{m_0} = \frac{(m + m_0)a}{m_0} = \frac{(m + m_0)v_0}{m_0 t} = \frac{3 + 5}{5} \cdot 0{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}80\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

b) Od začátku brzdění do nárazu se náklad pohybuje vzhledem k zemi rovnoměrným pohybem, vzhledem k automobilu rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti a_1. Platí

$$d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

z čehož pro hledaný čas dostaneme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6}{0{,}8}}\ \mathrm{s} = 2{,}0\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Bezprostředně před nárazem je velikost rychlosti

$$v_1 = v_0 - a_1 t_1 = (6 - 0{,}8 \cdot 2)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Podle ZZH soustavy automobil – náklad platí

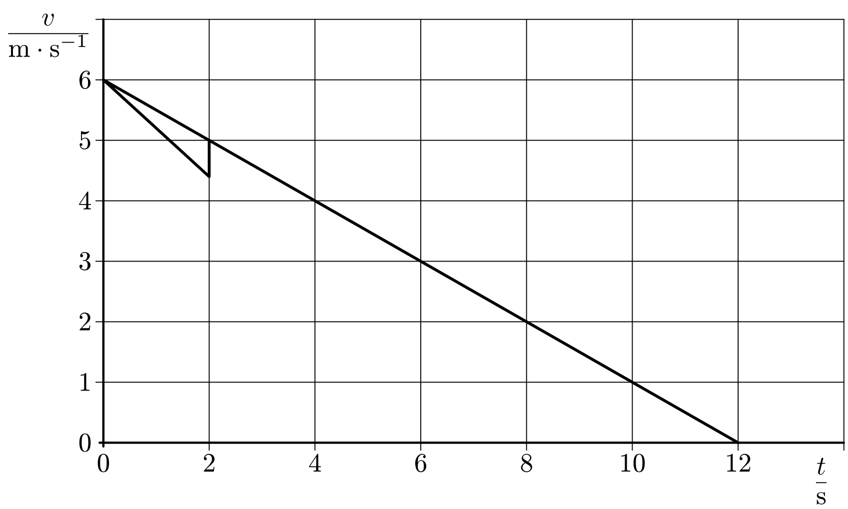
$$m_0 v_1 + m v_0 = (m + m_0) v_2.$$

Z rovnice plyne

$$v_2 = \frac{m_0 v_1 + m v_0}{m_0 + m} = \frac{5 \cdot 4{,}4 + 3 \cdot 6}{5 + 3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

d)



Z grafu získáme brzdné dráhy jako obsah plochy pod grafem:

$$s_1 = \frac{v_0 t}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2}\ \mathrm{m} = 36\ \mathrm{m},$$

$$s_2 = s_1 - \frac{(v_2 - v_1) t_1}{2} = 36\ \mathrm{m} - \frac{(5 - 4{,}4) \cdot 2}{2}\ \mathrm{m} = 35{,}4\ \mathrm{m}.$$

4 body

Poznámka: Brzdná dráha těžiště naloženého automobilu je v obou případech 36 m, neboť pohybem nákladu na korbě se těžiště posunulo ve směru jízdy právě o vzdálenost 0,6 m

$$\left(\Delta x = \frac{m}{m + m_0} \cdot d = \frac{3}{5 + 3} \cdot 1{,}6\ \mathrm{m} = 0{,}6\ \mathrm{m}\right).$$

4. a) Ze zákona zachování mechanické energie $mgl = \frac{1}{2}mv^2$ plyne

$$v = \sqrt{2gl}. \tag{1}$$

2 body

b) Obě kuličky se v každém okamžiku pohybují stejnou úhlovou rychlostí. Z podmínky

$$\omega = \frac{v_1}{l} = \frac{v_2}{0{,}5l}$$

plyne $v_2 = \frac{v_1}{2}$.

Kinetická energie v nejnižší poloze je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}mv_1^2.$$

Ze ZZME

$$mgl + mg\frac{l}{2} = \frac{5}{8}mv_1^2$$

dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{12}{5}gl}, \tag{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{3}{5}gl}. \tag{3}$$

4 body

c) V případě a) působí v nejnižší poloze na osu otáčení tíhová síla kuličky a odstředivá síla. Obě síly směřují svisle dolů, jejich výslednice má velikost

$$F = mg + m\frac{v^2}{l}.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme $F = 3mg$.
Obdobně v případě b):

$$F = 2mg + m\frac{v_1^2}{l} + m\frac{v_2^2}{0{,}5l}.$$

Užitím rovnic (2) a (3) dostaneme $F = \frac{28}{5}mg$.

4 body

5. a) Z rovnic šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Dosazením $x = 9{,}15$ m dostaneme výšku spodního okraje míče jednotlivých střelců nad zemí v místě zdi

$$y_\mathrm{A} = 2{,}18\ \mathrm{m}, \quad y_\mathrm{B} = 1{,}91\ \mathrm{m}, \quad y_\mathrm{C} = 1{,}64\ \mathrm{m}.$$

Z výsledků plyne, že Cába trefil zeď a že ostatní zeď přestřelili. Dosazením $x = 22{,}0$ m dostaneme výšku spodního okraje míče nad brankovou čarou

$$y'_\mathrm{A} = 2{,}59\ \mathrm{m}, \quad y'_\mathrm{B} = 2{,}20\ \mathrm{m}.$$

Ze skutečností $y'_\mathrm{A} > h$ a $y'_\mathrm{B} + d < h$ dále plyne, že Adámkova střela šla příliš vysoko, zatímco Beneš jako jediný skóroval.

4 body

b) Z rovnice (1) plyne $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$.
Dosazením $x = 22{,}0$ m dostaneme dobu letu míče při střele Adámka a Beneše:

$$t_\mathrm{A} = 0{,}96\ \mathrm{s}, \quad t_\mathrm{B} = 0{,}92\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Označme t_m čas, v němž míč dosáhne maximální výšky y_m. V tomto okamžiku je svislá složka rychlosti míče $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_\mathrm{m}$ nulová. Z podmínky $v_y = 0$ plyne

$$t_\mathrm{m} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{3}$$

Dosazením času t_m do rovnice (1) dostaneme odpovídající x-ovou souřadnici vrcholu trajektorie

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Pro jednotlivé střelce vychází $x_\mathrm{mA} = 17{,}3$ m, $x_\mathrm{mB} = 16{,}9$ m.
Dosazením (3) do (2) dostaneme maximální výšku

$$y_\mathrm{m} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Pro jednotlivé střelce vychází $y_\mathrm{maxA} = 2{,}80$ m, $y_\mathrm{maxB} = 2{,}42$ m.

4 body

6. a) Nalezení polohy těžiště.

b) Ověření závislosti periody na úhlové výchylce. **1 bod**

c)

Číslo měření	1	2	3	4	5	6
r/cm	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2
T/s	1,127	1,124	1,131	1,129	1,119	1,118

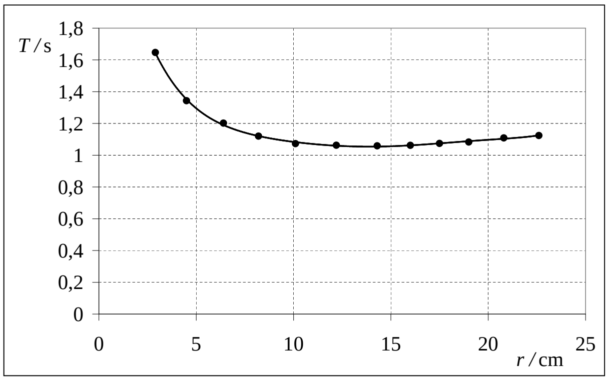
Závěr: Perioda kmitů nezávisí na směru spojnice těžiště a průsečíku osy otáčení s rovinou desky. **2 body**

d)

Číslo měření	$\frac{r}{\text{cm}}$	N	$\frac{t_1}{\text{s}}$	$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{t_3}{\text{s}}$	$\frac{T = \frac{t}{N}}{\text{s}}$
1	2,9	10	16,38	16,37	16,65	1,647
2	4,5	10	13,44	13,55	13,30	1,343
3	6,4	10	12,02	12,01	12,02	1,202
4	8,2	10	11,27	11,17	11,15	1,120
5	10,1	10	10,80	10,62	10,78	1,073
6	12,2	10	10,65	10,64	10,60	1,063
7	14,3	10	10,55	10,61	10,62	1,059
8	16,0	10	10,66	10,59	10,60	1,062
9	17,5	10	10,78	10,76	10,69	1,074
10	19,0	10	10,87	10,79	10,82	1,083
11	20,8	10	11,12	11,08	11,07	1,109
12	22,6	10	11,28	11,23	11,21	1,124

3 body

e)



Závěr: Nalezená funkce s rostoucí vzdáleností nejprve klesá, poté roste, vykazuje tedy minimum. **4 body**

7. a) Z 3. Keplerova zákona dostaneme

$$T_{\mathrm{Ga}} = T_{\mathrm{Ka}} \sqrt{\frac{r_{\mathrm{Ga}}^3}{r_{\mathrm{Ka}}^3}} = 7{,}15 \text{ d.}$$

1 bod

b) Obdobně z 3. Keplerova zákona dostaneme

$$r_{\mathrm{Io}} = r_{\mathrm{Ka}} \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Io}}^2}{T_{\mathrm{Ka}}^2}} = 422 \cdot 10^3 \text{ km}, \qquad r_{\mathrm{Eu}} = r_{\mathrm{Ka}} \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{T_{\mathrm{Ka}}^2}} = 671 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

2 body

c) Kruhová rychlost v centrálním gravitačním poli s poloměrem klesá, největší obvodovou rychlost má proto nejbližší měsíc Io:

$$v = \frac{2\pi r_{\mathrm{Io}}}{T_{\mathrm{Io}}} = 17\,300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

d) Hledané vzdálenosti jsou

$$d_{\min} = r_{\mathrm{Ka}} - r_{\mathrm{Ga}} = 0{,}813 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad d_{\max} = r_{\mathrm{Ka}} + r_{\mathrm{Ga}} = 2{,}953 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Situace nastane, jestliže Ganymed získá před Kallistem úhlový náskok $\Delta\varphi = \pi$ rad. Platí:

$$\Delta\varphi = (\omega_{\mathrm{Ga}} - \omega_{\mathrm{Ka}})\Delta t,$$

kde $\omega_{\mathrm{Ga}} = \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{Ga}}}$, $\omega_{\mathrm{Ka}} = \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{Ka}}}$ jsou úhlové rychlosti těchto měsíců. Po dosazení dostaneme rovnici

$$\pi = \left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{Ga}}} - \frac{2\pi}{T_{\mathrm{Ka}}}\right)\Delta t,$$

z níž plyne

$$\Delta t = \frac{T_{\mathrm{Ka}} T_{\mathrm{Ga}}}{2(T_{\mathrm{Ka}} - T_{\mathrm{Ga}})} = 6{,}25 \text{ d.}$$

3 body

e) Gravitační síla, kterou působí Jupiter např. na měsíc Kallisto, je současně silou dostředivou. Z toho plyne

$$m_{\mathrm{Ka}} r_{\mathrm{Ka}} \frac{4\pi^2}{T_{\mathrm{Ka}}^2} = \varkappa \frac{m_{\mathrm{Ka}} M}{r_{\mathrm{Ka}}^2}, \qquad M = \frac{4\pi^2 r_{\mathrm{Ka}}^3}{\varkappa T_{\mathrm{Ka}}^2} = 1{,}90 \cdot 10^{27} \text{ kg.}$$

2 body