Řešení úloh 1. kola 51. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 3, 5, 7), P. Šedivý (6, 7), J. Jírů (4), I. Volf (2).

1.a) Na začátku pohybu působí na lyžaře síla

$$F_1 = mg(\sin\alpha - f_0\cos\alpha).$$

Z podmínky $F_1 > 0$ dostaneme $f_0 < \operatorname{tg}\alpha$, tj. $f_0 < 0{,}58$.

3 body

b) Rychlost lyžaře na konci svahu je

$$v_1 = a_1T_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)T_1.$$

kde f je součinitel smykového tření za pohybu. Touto rychlostí pak začne lyžař vyjíždět do protilehlého svahu. Pro okamžik, kdy lyžař zastaví, můžeme psát

$$0 = v_1 - a_2T_2,$$

kde $a_2 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$. Po dosazení dostaneme

$$0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)T_1 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)T_2,$$

z čehož

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha}. \tag{1}$$

2 body

Pro dráhy s_0, s platí

$$s_0 = \frac{v_1T_1}{2}, \qquad s = \frac{v_1T_2}{2}.$$

Z toho $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{s_0}{s} = \dfrac{5}{4}$.

2 body

c) Po dosazení z (1) dostaneme

$$\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha} = \frac{5}{4}, \qquad \text{z čehož} \qquad f = \frac{1}{9}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}06.$$

3 body

2.a) Vyjdeme ze 3. Keplerova zákona $\dfrac{r_Z^3}{r_M^3} = \dfrac{T_Z^2}{T_M^2}$, z čehož

$$r_M = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2} r_Z = 1{,}524\ \text{AU}.$$

Velikosti rychlostí pohybu Země a Marsu kolem Slunce jsou pak dány vztahy

$$v_\mathrm{Z} = \frac{2\pi r_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{Z}} = 29{,}8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}},$$

$$v_\mathrm{M} = \frac{2\pi r_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}} = \frac{2\pi \sqrt[3]{\left(\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{Z}}\right)^2} r_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{M}} = \frac{2\pi r_\mathrm{Z}}{\sqrt[3]{T_\mathrm{Z}^2 T_\mathrm{M}}} = 24{,}1\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Gravitační síla je současně silou dostředivou, platí tedy

$$\varkappa \frac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{S}}{r_\mathrm{M}^2} = M_\mathrm{M} \frac{4\pi^2}{T_\mathrm{M}^2} r_\mathrm{M},$$

z čehož

$$M_\mathrm{S} = \frac{4\pi^2}{\varkappa T_\mathrm{M}^2} r_\mathrm{M}^3 = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

2 body

c) Synodická oběžná doba T_s je průměrná doba mezi dvěma opozicemi Marsu. Pozorovateli na Zemi se pohyb Marsu jeví, jako by probíhal průměrnou úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} = \omega_\mathrm{Z} - \omega_\mathrm{M} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{Z}} - \frac{2\pi}{T_\mathrm{M}}.$$

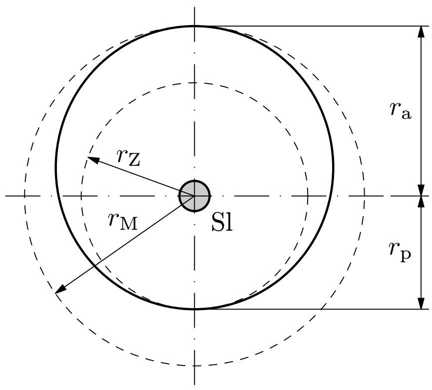
Z toho

$$T_\mathrm{s} = \frac{T_\mathrm{Z} T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M} - T_\mathrm{Z}} = 2{,}135\ \mathrm{roku}.$$

2 body

d) Kosmická loď se pohybuje po elipse, pro kterou je poloměr oběžné trajektorie Země vzdálenost v perihéliu, poloměr oběžné trajektorie Marsu vzdáleností v aféliu (obr. R1).
Podle 3. Keplerova zákona platí pro oběžnou dobu kosmické lodi T_L vztah

$$T_\mathrm{L} = T_\mathrm{Z} \sqrt{\left(\frac{a_\mathrm{L}}{r_\mathrm{Z}}\right)^3},$$



Obr. R1

kde $a_\mathrm{L} = \dfrac{r_\mathrm{Z} + r_\mathrm{M}}{2}$ je délka hlavní poloosy trajektorie pohybu kosmické lodi. Po dosazení za a_L do vztahu pro T_L dostaneme

$$T_\mathrm{L} = T_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{Z}}\right)^3},$$

po dosazení za $\dfrac{r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{Z}}$ z úlohy a) dostaneme

$$T_\mathrm{L} = T_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\left[1+\left(\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{Z}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3} = 1{,}42\ \text{roku}.$$

Kosmická loď se tedy pohybuje po dobu $\dfrac{T_\mathrm{L}}{2} = 0{,}71$ roku.

3 body

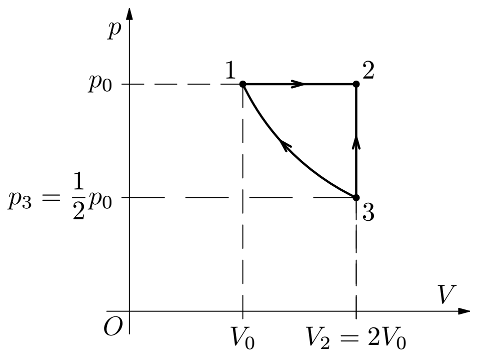
3. a) Děj 1 − 2 je izobarický: $p_2 = p_0$, $\dfrac{V_0}{T_0} = \dfrac{V_2}{T_2}$, z čehož $V_2 = 2V_0$;

děj 2 − 3 je izochorický: $V_3 = V_2 = 2V_0$, $\dfrac{p_2}{T_2} = \dfrac{p_3}{T_3}$, z čehož $p_3 = \dfrac{1}{2}p_2 = \dfrac{1}{2}p_0$;

děj 3 − 1 je izotermický.

3 body

b) Z hodnot vypočtených v úloze a) nyní nakreslíme $p-V$ diagram kruhového děje (obr. R2).



Obr. R2

2 body

c) Děj 1 − 2: práce vykonaná plynem je

$$W'_{12} = p_0(V_2 - V_0) = p_0V_0,$$

vnitřní energie plynu se zvětší o

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_0) = \frac{5}{2}nRT_0 = \frac{5}{2}p_0V_0.$$

Teplo dodané plynu pak je

$$Q_{12} = W'_{12} + \Delta U_{12} = \frac{7}{2}p_0V_0.$$

Děj $2-3$: práce vykonaná plynem je rovna nule. Teplo Q'_{23}, které při tomto ději musíme odebrat plynu, je

$$Q'_{23} = -\Delta U_{23} = -\frac{5}{2}nR(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}nRT_0 = \frac{5}{2}p_0V_0.$$

Děj $3-1$: při tomto ději musíme vykonat práci

$$W_{31} = nRT_3 \ln\frac{V_3}{V_0} = nRT_0 \ln 2 = p_0V_0 \ln 2.$$

Jedná se o děj za stálé teploty, a proto je $\Delta U_{31} = 0$. Plyn při tomto ději odevzdá teplo

$$Q'_{31} = W_{31} = p_0V_0 \ln 2.$$

3 body

d) Účinnost kruhového děje je dána vztahem $\eta = \dfrac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q'_2}{Q_1}$, kam za Q_1 dosadíme $Q_1 = \frac{7}{2}p_0V_0$, za Q'_2 dosadíme

$$Q'_2 = Q'_{23} + Q'_{31} = \frac{5}{2}p_0V_0 + p_0V_0 \ln 2.$$

Po dosazení do vztahu pro η dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{\frac{5}{2}p_0V_0 + p_0V_0 \ln 2}{\frac{7}{2}p_0V_0} = \frac{2}{7}(1 - \ln 2) = 0{,}088 = 8{,}8\ \%.$$

2 body

4.a) Aby se automobil rozjel, musí vyvinout tahovou sílu $F > F_1$. Automobil zrychluje při zvolené tahové síle do okamžiku, kdy velikost celkové síly působící proti pohybu dosáhne velikosti tahové síly. Pak pro velikost tahové síly platí:

$$F = F_1 + F_{\mathrm{odp}} = F_1 + kv^2. \tag{1}$$

Současně musí tahová síla splňovat podmínku $F \le f \cdot \dfrac{mg}{2}$,
jinak by docházelo k prokluzování záběrových kol. Automobil tak může vyvíjet tahovou sílu o maximální velikosti

$$F_{\max} = f \cdot \frac{mg}{2} = F_1 + kv_{\max}^2,$$

kde $v_{\max}$ je velikost maximální dosažitelné rychlosti. Z tohoto vztahu plyne

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{0{,}5fmg - F_1}{k}} = 34{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Této rychlosti odpovídá výkon

$$P' = F_{\max}v_{\max} = \left(F_1 + kv_{\max}^2\right) v_{\max} = 50{,}8\ \mathrm{kW}.$$

Maximální výkon motoru se tedy za daných podmínek nevyužije.

4 body

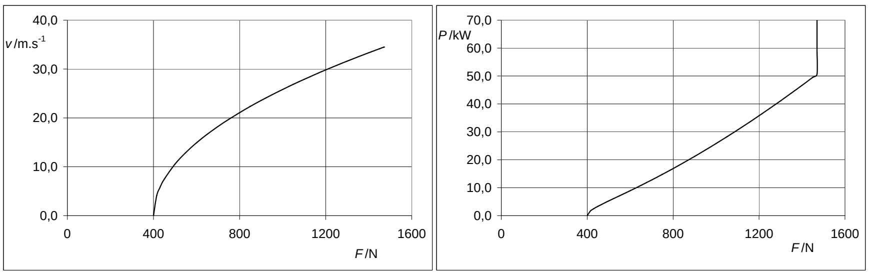
b) Úpravou (1) dostaneme vztah, který vyjadřuje dosažitelnou rychlost automobilu jako funkci zvolené tahové síly v intervalu $\langle F_1, F_{\max}\rangle$:

$$v = \sqrt{\frac{F - F_1}{k}}.$$

Závislost dosažitelného výkonu na tahové síle je pak vyjádřena vztahem

$$P = Fv = F\sqrt{\frac{F - F_1}{k}}.$$

Pokud bychom chtěli „přidáním plynu“ překročit maximální tahovou sílu $F_{\max}$, dojde k prokluzování kol, výkon motoru se bude zvětšovat až do $P_{\max}$, ale rychlost automobilu a tahová síla zůstanou konstantní.

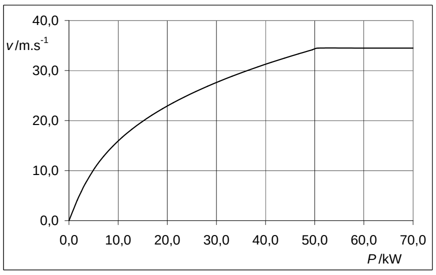


3 body

c) Při výkonu $P \le P'$ se velikost konečné rychlosti ustálí na hodnotě splňující podmínku

$$P = Fv = kv^3 + F_1v, \qquad \text{číselně} \qquad \{P\} = 0{,}9\{v\}^3 + 400\{v\}. \qquad (2)$$

Pro $v \leq v_{\max}$ tak máme funkční závislost výkonu na rychlosti. Graf hledané inverzní funkce závislosti rychlosti na výkonu získáme např. tak, že v Excelu podle vztahu (1) získáme hodnoty výkonu volbou hodnot rychlosti, ale zobrazíme graf inverzní závislosti. Při výkonu $P > P'$ dojde k prokluzování a rychlost se už nezvětšuje. V intervalu $P \in \langle P', P_{\max} \rangle$ tedy graf navážeme grafem konstantní funkce.



3 body

5. a) Při ustáleném stavu bude zářivý tok dopadající na kolmo na plochu S stejný jako zářivý tok plochou vyzařovaný. Ve vzdálenosti $r = 1$ AU od Slunce dostaneme

$$\Phi = \frac{S}{4\pi r^2} L = \sigma S T_1^4, \quad \text{z čehož} \quad T_1 = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi r^2 \sigma}} = 393 \text{ K}, \quad t_1 = 120\ ^\circ\text{C}.$$

2 body

b) Zářivý tok $\Phi_1 = \sigma T_1^4 \cdot S_1$ přijatý družicí se musí rovnat zářivému toku $\Phi_2 = \sigma T^4 \cdot S$, který družice vyzáří, tj.

$$\sigma T_1^4 \cdot S_1 = \sigma T^4 \cdot S.$$

Po dosazení za T_1 z úlohy a) dostaneme $\dfrac{L}{4\pi r^2} \cdot S_1 = \sigma T^4 \cdot S$, z čehož

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi r^2 \sigma} \cdot \frac{S_1}{S}}.$$

2 body

c) Má-li družice kulový tvar o poloměru R, potom

$$S_1 = \pi R^2, \quad S = 4\pi R^2. \qquad S_1/S = 1/4.$$

Po dosazení do vztahu z úlohy b) dostaneme

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi r^2 \sigma}} = 278\ \mathrm{K}. \quad t_2 = 5\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

d) Pro družici tvaru krychle o hraně a můžeme psát

$$S_1 = a^2,\ S = 6a^2, \qquad S_1/S = 1/6.$$

Po dosazení do vztahu z úlohy b) dostaneme

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{L}{24\pi r^2 \sigma}} = 251\ \mathrm{K}, \quad t_3 = -22\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

e) Pro válcovou družici je $S_1 = dh = 3d^2$, $S = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} + \pi dh = \frac{7\pi d^2}{2}$. Potom $S_1/S = 6/(7\pi)$. Po dosazení do vztahu z úlohy b) dostaneme

$$T_4 = \sqrt[4]{\frac{3L}{14\pi^2 r^2 \sigma}} = 284\ \mathrm{K}, \quad t_4 = 11\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

7.a) Označme $I_ž$ proud procházející žárovkou a $U_ž$ napětí na žárovce. Pro větší přehlednost překreslíme schéma obvodu před sepnutím spínače podle obr. R3 a po sepnutí spínače podle obr. R4. V prvním případě platí

$$R\left(I_ž + \frac{U_ž + RI_ž}{2R}\right) + U_ž + RI_ž = U_0,$$

v druhém

$$2R\left(I_ž + \frac{U_ž}{R}\right) + U_ž = U_0.$$

Po úpravě dojdeme k soustavě rovnic

$$5RI_ž + 3U_ž = 2U_0, \qquad 2RI_ž + 3U_ž = U_0,$$

která má řešení

$$I_ž = \frac{U_0}{3R} = 0{,}20\ \mathrm{A}, \qquad U_ž = \frac{U_0 - 2RI_ž}{3} = 12\ \mathrm{V}.$$

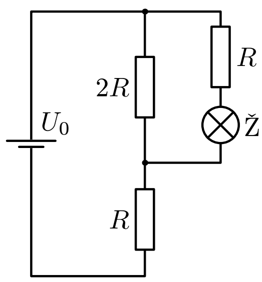
6 bodů

b) V prvním případě je proud odebíraný ze zdroje

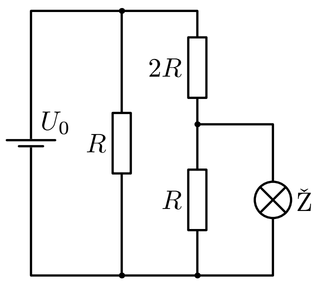
$$I_1 = I_ž + \frac{U_ž + RI_ž}{2R} = 0{,}33\ \mathrm{A},$$

v druhém případě $\quad I_2 = \dfrac{U_0}{R} + I_ž + \dfrac{U_ž}{R} = 0{,}87\ \mathrm{A}.$

4 body



Obr. R3



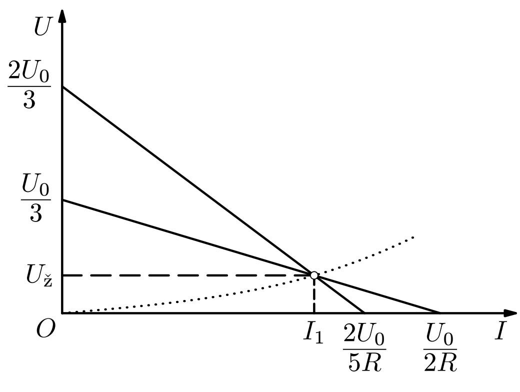
Obr. R4

Řešení úlohy a) užitím Théveninovy poučky:

V prvním případě můžeme obvod kromě žárovky nahradit zdrojem o elektromotorickém napětí $2U_0/3$, proudem nakrátko $0{,}4U_0/R$ a vnitřním odporu $5R/3$, v druhém případě zdrojem o elektromotorickém napětí $U_0/3$, proudem nakrátko $0{,}5U_0/R$ a vnitřním odporem $2R/3$. Nemá-li po sepnutí spínače dojít ke změně proudu, musí voltampérová chrakteristika žárovky procházet průsečíkem zatěžovacích charakteristik obou zdrojů (obr. R5). To vede k soustavě rovnic

$$U = \frac{U_0}{3} - \frac{2R}{3} I = \frac{2U_0}{3} - \frac{5R}{3} I,$$

která má řešení $I = 0{,}20$ A, $U = 12$ V.



Obr. R5