**Řešení úloh celostátního kola 51. ročníku fyzikální olympiády.**

Autoři úloh: I. Charvát (1), B. Vybíral (4),
2. a 3. úloha jsou převzaty z časopisu Kvant.
Konečná úprava P. Šedivý

**1.** a) Zpočátku je v nádobce vzduch o objemu $V_0 = Sl$ a tlaku $p_0 = \varrho g H$. Jak nádobka pomalu klesá, probíhá izotermický děj, při kterém se tlak zvětšuje o hydrostatický tlak odpovídající rozdílu hladin a objem se zmenšuje. Podle Boylova-Mariottova zákona platí

$$V_0 p_0 = (V_0 - Sh_1)[p_0 + \varrho g(h - h_1)].$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$Sl \cdot \varrho g H = (Sl - Sh_1)[\varrho g H + \varrho g(h - h_1)],$$

$$lH = (l - h_1)(H + h - h_1) = lH + lh - lh_1 - Hh_1 - hh_1 + (h_1)^2,$$

$$h_1(H + l + h - h_1) = lh.$$

Protože $H \gg l > h > h_1$, můžeme v závorce veličiny $l$, $h$ a $h_1$ zanedbat a dojdeme tak k aproximaci

$$h_1 \approx \frac{l}{H} h = k_1 h, \quad \text{kde} \quad k_1 = \frac{l}{H}$$

je konstanta úměrnosti. Pro dané hodnoty je

$$H = \frac{p_0}{\varrho g} = 10{,}2 \text{ m}, \quad k_1 = 0{,}0196 \approx 0{,}02.$$

Hladina uvnitř nádobky vystoupí jen nepatrně. Pro maximální hodnotu $h = l = 0{,}2$ m je $h_1 = 4$ mm. **4 body**

b) Podobně budeme postupovat i v případě baňky s úzkým hrdlem. Platí

$$V_0 p_0 = (V_0 - Sh_1)[p_0 + \varrho g(h - h_1)].$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$V_0 \cdot \varrho g H = (V_0 - Sh_1)[\varrho g H + \varrho g(h - h_1)],$$

$$V_0 H = (V_0 - Sh_1)(H + h - h_1) = V_0 H + V_0 h - V_0 h_1 - SHh_1 - Shh_1 + S(h_1)^2,$$

$$V_0 h = h_1(V_0 + SH + Sh - Sh_1) \approx h_1(V_0 + SH),$$

neboť členy $Sh$ a $Sh_1$ můžeme v závorce vedle $V_0$ a $SH$ zanedbat. Pak

$$h_1 \approx \frac{V_0}{V_0 + SH} h = k_2 h, \quad \text{kde} \quad k_2 = \frac{V_0}{V_0 + SH} = \frac{4V_0}{4V_0 + \pi d^2 H}$$

je konstanta úměrnosti. **4 body**

Aby platilo $h_1 = h/2$, tj. $k_2 = 0{,}5$, musí být

$$d = \sqrt{\frac{4V_0}{\pi H}} = 11{,}2 \text{ mm}.$$

**2 body**

**2.** a) Po sepnutí kontaktů přerušovače začne cívkou procházet proud $i$, který postupně roste a v cívce se indukuje elektromotorické napětí $U_\mathrm{i}$ stejně velké jako elektromotorické napětí zdroje a orientované opačným směrem. Platí

$$U_\mathrm{i} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -U \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{L} = \text{konst.}$$

Proud cívkou se tedy zvětšuje rovnoměrně a za dobu $\tau_1$ dosáhne hodnoty

$$I_0 = \frac{U}{L}\tau_1 = 50\ \text{mA}.$$

Po rozpojení kontaktů začne proud v cívce klesat a indukované napětí je orientované stejně jako elektromotorické napětí zdroje a opačně než elektromotorické napětí akumulátoru. Proud prochází přes diodu do akumulátoru. Platí

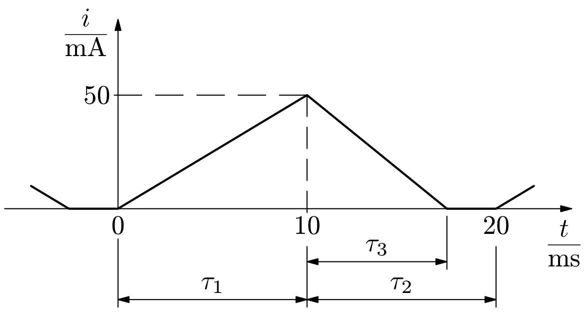
$$U_\mathrm{i} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U - U_\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_\mathrm{e} - U}{L} = \text{konst.}$$

Proud se tedy bude zmenšovat lineárně podle vztahu

$$i = I_0 - \frac{U_\mathrm{e} - U}{L}t.$$

Za dobu $\tau_3 = \dfrac{I_0 L}{U_\mathrm{e} - U} = \dfrac{U}{U_\mathrm{e} - U}\tau_1 = 0{,}007\,14\ \text{s} < \tau_2$
klesne na nulu a dioda přejde do závěrného režimu. Po uplynutí doby $\tau_2$ se celý děj opakuje (obr. R1).

**6 bodů**




Obr. R1

b) Akumulátor se nabíjí po dobu $\tau_3$ průměrným proudem $I_0/2$ a získá přitom náboj

$$\Delta Q = \frac{I_0}{2}\tau_3 = \frac{U^2\tau_1^2}{2L(U_\mathrm{e} - U)}.$$

Střední hodnota proudu nabíjejícího akumulátor je

$$I_\text{stř} = \frac{\Delta Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\Delta Q}{2\tau_1} = \frac{U^2\tau_1}{4L(U_\mathrm{e} - U)} = 8{,}9\ \text{mA}.$$

**4 body**

**3.** a) Vznikne-li zobrazením reálného předmětu reálný obraz, platí $a > 0$, $a' > 0$. Jejich vzdálenost je $a + a'$. Ze zobrazovací rovnice tenké spojky plyne

$$a' = \frac{af}{a-f} > 0 \quad \Rightarrow \quad a > f, \qquad a + a' = a + \frac{af}{a-f} = \frac{a^2}{a-f}. \tag{1}$$

Minimum tohoto součtu nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{\mathrm{d}(a+a')}{\mathrm{d}a} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = \frac{a(a-2f)}{(a-f)^2} = 0 \quad \text{pro} \quad a = 2f.$$

Pro $a > 2f$ je derivace kladná, pro $a < 2f$ je záporná. Jedná se tedy o minimum. Minimální vzdálenost reálného obrazu od reálného předmětu je tedy

$$(a + a')_{\min} = \frac{4f^2}{2f - f} = 4f > l.$$

Bodový reálný obraz zdroje tedy vznikne vždy až za stínítkem a na stínítku při každé poloze čočky vznikne světelná skvrna.

**4 body**

b) Položíme-li čočku přímo na stínítko, je $m = M$. Má-li se po oddálení čočky od stínítka průměr skvrny zmenšit, musí se svazek paprsků za čočkou sbíhat do reálného obrazu Z′ za stínítkem (obr. R2). Ze vztahů (1) a z obrázku plyne

$$l > a > f, \qquad \frac{m}{M} = \frac{a' + a - l}{a'} = \frac{\dfrac{af + (a-l)(a-f)}{a-f}}{\dfrac{af}{a-f}} = \frac{a^2 - al + lf}{af},$$

$$m = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - al + lf}{a}.$$

Minimum opět nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} = \frac{M}{f} \cdot \frac{(2a-l)a - a^2 + al - lf}{a^2} = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - lf}{a^2} = 0 \quad \text{pro} \quad a = \sqrt{lf}.$$

Pro $a > \sqrt{lf}$ je derivace kladná, pro $a < \sqrt{lf}$ je záporná. Jedná se tedy o minimum.

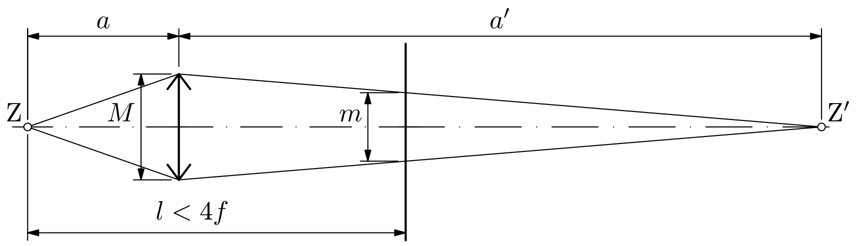
*Poznámka:* Z podmínky $f > l/4$ plyne $a > \sqrt{\dfrac{l^2}{4}} = \dfrac{l}{2}$.

Minimální průměr skvrny za výše uvedeného předpokladu $l > f$ je

$$m_{\min} = \frac{M}{f} \cdot \frac{lf - l\sqrt{lf} + lf}{\sqrt{lf}} = \frac{M}{f}(2\sqrt{lf} - l).$$

Jestliže $l \leq f$, pak po oddálení čočky od stínítka platí $a < f$, paprsky se za čočkou rozbíhají a skvrna se zvětšuje. Nejmenší průměr $m = M$ má, když je čočka položena na stínítku.

**6 bodů**




Obr. R2

**4.** a) Jedná se o pohyb rovnoměrně zpomalený se zpomalením $a_0 = F_0/m$. Přistávací dráha

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a_0} = \frac{v_0^2 m}{2F_0} = 900\ \mathrm{m}.$$

**1 bod**

b) Počáteční brzdná síla bude mít velikost $F_1 = F_0 + Av_0^2$ a zpomalení

$$a_1 = \frac{F_0 + Av_0^2}{m} = 11\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 1{,}1g.$$

**1 bod**

c) V pohybové rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\left(F_0 + Av^2\right)$$

provedeme separaci proměnných:

$$\mathrm{d}x = -\frac{mv\,\mathrm{d}v}{F_0 + Av^2}.$$

Integrujeme pro $x \in \langle 0, x\rangle$, $v \in \langle v_0, v\rangle$:

$$x = -\frac{m}{2A}\int_{v_0}^{v}\frac{2Av\,\mathrm{d}v}{F_0 + Av^2} = \frac{m}{2A}\ln\frac{F_0 + Av_0^2}{F_0 + Av^2}. \tag{1}$$

Odtud

$$v = v(x) = \sqrt{\left(\frac{F_0}{A} + v_0^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{2A}{m}x} - \frac{F_0}{A}} = v_0\sqrt{\left(\frac{F_0}{Av_0^2} + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{2A}{m}x} - \frac{F_0}{Av_0^2}}. \tag{2}$$

Rychlost se zmenšuje podle exponenciály až k $v = 0$.

**5 bodů**

d) Délku přistávací dráhy určíme z (1) nebo (2) pro $v = 0$ a $x = s_1$:

$$s_1 = \frac{m}{2A}\ln\left(1 + \frac{Av_0^2}{F_0}\right) = 270\ \mathrm{m}.$$

**2 body**

e) Podle Newtonova vzorce pro odporovou sílu platí pro koeficient $A$

$$A = 3\cdot\frac{1}{2}C\frac{\pi d^2}{4}\varrho \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt{\frac{8A}{3\pi\varrho C}} = 3{,}4\ \mathrm{m}.$$

**1 bod**