Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády

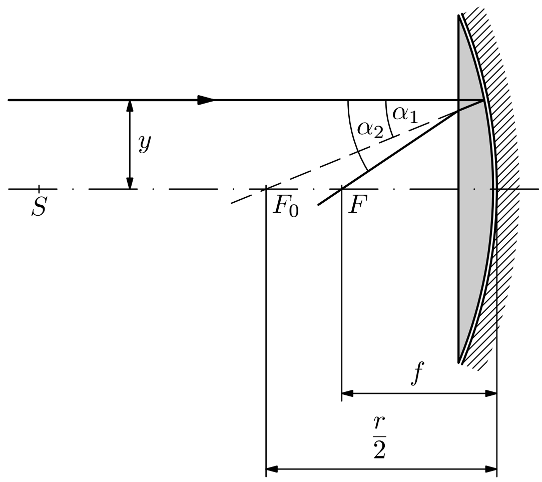
Kategorie A

Autoři úloh: M. Jarešová (1), P. Šedivý (2, 3), B. Vybíral (4)

1. a) *1. způsob:* Vyjdeme z obrázku R1. Protože paprsky procházejí v blízkosti osy, platí

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \approx \sin\alpha_1 \approx \frac{y}{\frac{r}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 \approx \sin\alpha_2 \approx \frac{y}{f}, \qquad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{r}{2f} = n,$$

z čehož $f = \dfrac{r}{2n}$ je ohnisková vzdálenost soustavy. Protože $f_0 = \dfrac{r}{2}$, je $f = \dfrac{f_0}{n} = \dfrac{2}{3}f_0$. Ohnisková vzdálenost se zmenší 1,5krát.



Obr. R1

2. způsob: Optická mohutnost zrcadla je $\varphi_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2}{r}$,

optická mohutnost ploskovypuklé čočky je $\varphi_1 = \dfrac{1}{f_1} = (n-1)\dfrac{1}{r}$,

Protože světlo prochází čočkou dvakrát, je výsledná optická mohutnost soustavy

$$\varphi = \frac{1}{f} = \varphi_0 + 2\varphi_1 = \frac{2}{r} + 2(n-1)\frac{1}{r} = \frac{2n}{r}$$

a ohnisková vzdálenost soustavy je $f = \dfrac{r}{2n} = \dfrac{f_0}{n}$.

4 body

b) Při zobrazení samotným zrcadlem je

$$a = r, \qquad \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_0} - \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r}, \qquad a' = r = a, \qquad Z_0 = -\frac{a'}{a} = -1.$$

Obraz je skutečný, převrácený, stejně velký jako předmět a nachází se také ve středu křivosti zrcadla.
Při zobrazení soustavou je

$$a = r, \qquad \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{2n}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}, \qquad a' = \frac{r}{2}, \qquad Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{1}{2}.$$

Obraz je skutečný, převrácený, zmenšený na polovinu a nachází se uprostřed mezi vrcholem zrcadla a středem křivosti.

3 body

c) Použijeme vztah pro příčné zvětšení

$$Z = -\frac{f}{a-f} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{Z-1}{Z} f.$$

Jestliže $Z = Z_0 = -1$, pak

$$a = \frac{-1-1}{-1} f = 2f = 2 \cdot \frac{r}{2n} = \frac{r}{n} = \frac{2}{3} r, \qquad a' = -Z_0 a = a.$$

3 body

2. a) Vyjdeme z obrázku R2. x-ová souřadnice bodu S je polovinou x-ové souřadnice bodu B. Proto je trojúhelník OSB rovnoramenný a bod S se pohybuje po čtvrtkružnici o poloměru l se středem v bodě O. Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ korálku má směr tečny ke čtvrtkružnici a její x-ová složka má konstantní velikost $u/2$. Velikost okamžité rychlosti korálku je

$$v = \frac{u}{2\cos\alpha}. \tag{1}$$

3 body

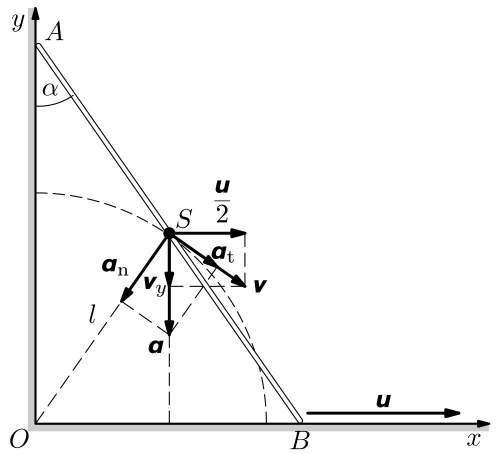
Protože vodorovná složka rychlosti korálku je konstantní, má jeho zrychlení $\boldsymbol{a}$ svislý směr. Velikost normálové složky zrychlení je

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{l} = \frac{u^2}{4l\cos^2\alpha},$$

velikost zrychlení

$$a = \frac{a_\mathrm{n}}{\cos\alpha} = \frac{u^2}{4l\cos^3\alpha}. \tag{2}$$

3 body



Obr. R2

b) Na korálek působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a síla od tyčky $\boldsymbol{T}$. Podle druhého pohybového zákona je

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{F}_G.$$

Podle třetího pohybového zákona působí korálek na tyčku reakcí

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}_G - m\boldsymbol{a} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}).$$

Zrychlení korálku má počáteční velikost $a_0 = u^2/4l$ a během pohybu se zvětšuje. Pokud je $a_0 \geq g$, působí reakce korálku trvale vzhůru a má velikost

$$R = m\left(\frac{u^2}{4l\cos^3\alpha} - g\right). \tag{3}$$

Jestliže $a_0 \leq g$, působí reakce korálku nejprve dolů a má velikost

$$R = m\left(g - \frac{u^2}{4l\cos^3\alpha}\right). \tag{4}$$

Při dosažení úhlu

$$\alpha = \arccos\sqrt[3]{\frac{u^2}{4lg}}$$

je nulová a teprve potom začne působit vzhůru a platí (3).

4 body

Jiné řešení úlohy a):
Souřadnice korálku se mění v závislosti na čase podle vztahů

$$x = \frac{ut}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{4l^2 - u^2t^2}}{2}.$$

Dvojím derivováním dostaneme souřadnice rychlosti a zrychlení:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{2} = \text{konst.}, \qquad a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{u^2t}{2\sqrt{4l^2 - u^2t^2}}, \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2u^2l^2}{(4l^2 - u^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pak

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ul}{\sqrt{4l^2 - u^2t^2}}, \qquad a = |a_y| = \frac{2u^2l^2}{(4l^2 - u^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dosazením $ut = 2l\sin\alpha$ a úpravami dojdeme ke vztahům (1) a (2).

3. a) Tlak vyloučené třaskavé směsi je

$$p = p_{\mathrm{at}} - p_{\mathrm{n}} = 94\,460\ \mathrm{Pa} \approx 94\,500\ \mathrm{Pa}.$$

1 bod

Elektrolýza probíhá podle vzorce

$$2\mathrm{H_2O} \quad \rightarrow \quad 2\mathrm{H_2} + \mathrm{O_2}.$$

To znamená, že ze dvou molů vody vzniknou dva moly vodíku a jeden mol kyslíku a že látkové množství n_1 vyloučeného vodíku je stejné jako látkové množství rozložené vody a dvakrát větší než látkové množství n_2 vyloučeného kyslíku. Látkové množství třaskavé směsi určíme pomocí stavové rovnice:

$$n = n_1 + n_2 = 1{,}5 n_1 = \frac{pV}{RT}.$$

Z toho

$$n_1 = \frac{pV}{1{,}5RT} = \frac{94\,460 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-3}}{1{,}5 \cdot 8{,}315 \cdot 303{,}15}\ \mathrm{mol} = 0{,}0562\ \mathrm{mol}.$$

Hmotnost rozložené vody je

$$m = n_1 \cdot M_{\mathrm{m}}(\mathrm{H_2O}) = 0{,}0562 \cdot 18{,}016 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} = 1{,}01\ \mathrm{g}.$$

5 bodů

b) K rozložení jedné molekuly vody jsou zapotřebí 2 elementární náboje. Elektrolytem prošel celkový náboj

$$Q = n_1 \cdot N_{\mathrm{A}} \cdot 2\mathrm{e} = 0{,}0562 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 10\,800\ \mathrm{C}.$$

4 body

4. a) Z rovnováhy sil: tíhové, vztlakové a odporové při ustáleném pohybu směrem dolů dostaneme

$$-\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_0 - \varrho)g + 6\pi\eta r v_0 = 0,$$

neboli

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\varrho_0 - \varrho)g}} = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 4{,}0\ \mu\text{m}.$$

3 body

b) Nejprve je třeba posoudit, jakým směrem se bude kapička pohybovat. O tom rozhodneme porovnáním velikostí elektrické síly a síly tíhové zmenšené o sílu vztlakovou:

$$F_\text{e} = QE = 15e\frac{U}{d} = 3{,}60\ \cdot 10^{-12}\ \text{N} \quad \ldots \quad \text{síla míří vzhůru,}$$

$$F_G - F_\text{vz} = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_0 - \varrho)g = 2{,}25 \cdot 10^{-12}\ \text{N} \quad \ldots \quad \text{síla míří dolů.}$$

Protože $F_\text{e} > (F_G - F_\text{vz})$, kapička se pohybuje vzhůru a odporová síla míří dolů.

4 body

V dynamické rovnováze pak platí pro velikosti sil

$$F_\text{e} = F_G - F_\text{vz} + 6\pi\eta r v.$$

Z toho

$$v = \frac{F_\text{e} - F_G + F_\text{vz}}{6\pi\eta r} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto rychlostí se kapička pohybuje svisle vzhůru ke kladné desce.

3 body