

Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autorka úloh: M. Jarešová.

- 1.a) Úroveň hladiny vody se nezmění, protože tíha ledu je v rovnováze se vztlakovou silou, která se rovná tíze vody vytlačené ledem. Když led roztaje, přemění se na vodu o stejném objemu, jaký měla voda, kterou před tím vytlačoval.

2 body

- b) Označme $V_1 = a^3$ objem větší krychle, $V_2 = b^3$ objem ocelové krychličky. Protože $(V_1 - V_2)\rho_1 + V_2\rho_3 = 1,42 \cdot 10^{-2} \text{ kg} > \rho_2 V_1 = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, krychle se celá potopí. Označme V_4 objem vody, která vznikne potom, co všechno led roztaje. Platí

$$\rho_1(V_1 - V_2) = \rho_2 V_4, \quad V_4 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(V_1 - V_2).$$

Protože $\rho_3 > \rho_2$, zůstane po roztátí ledu ocelová krychlička potopená pod vodou. Změna objemu ve válci tedy bude po roztátí ledu rovna

$$\Delta V = V_4 - (V_1 - V_2) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) (V_1 - V_2).$$

Pokles hladiny

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = - \frac{4 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) (a^3 - b^3)}{\pi d^2}.$$

Pro dané hodnoty je $\Delta h = -0,30 \text{ mm}$. Hladina vody ve válci tedy poklesne o $0,30 \text{ mm}$.

4 body

- c) Pokud místo ocelové krychličky necháme v ledové krychli zamrznout dřevěnou téhož objemu, jaký měla krychlička ocelová, bude krychle plavat na vodě. Označme V_3 objem ponořené části krychle a V_4 objem vody vzniklé při roztátí ledu. Tíha ledové krychle s dřevěnou krychličkou pak bude v rovnováze se vztlakovou silou, tj.

$$\rho_1(V_1 - V_2)g + \rho_4 V_2 g = \rho_2 V_3 g, \\ \rho_1(V_1 - V_2) = \rho_2 V_4.$$

Z toho

$$V_3 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(V_1 - V_2) + \frac{\rho_4}{\rho_2} V_2, \quad V_4 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(V_1 - V_2).$$

Protože $\rho_4 < \rho_1$, je třeba uvážit, že po roztátí ledu bude dřevěná krychlička plavat na vodě. Určíme, jaká část objemu V_5 krychličky ze dřeva bude ponořena ve vodě. Platí

$$\varrho_4 V_2 = \varrho_2 V_5,$$

z čehož

$$V_5 = \frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2.$$

Změna objemu ve válci tedy po roztátí ledu bude

$$\Delta V' = V_4 - V_3 + V_5 = -\frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2 + \frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2 = 0.$$

Hladina vody ve válci se tedy nezmění.

4 body

- 2.a) Nejprve pomocí zákona zachování mechanické energie určíme velikost rychlosti v_1 kuličky o hmotnosti m_1 , se kterou dopadne na krychličku o hmotnosti m_2 . Dostaneme

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Dále napíšeme zákon zachování hybnosti a mechanické energie pro okamžik srážky. Označíme u_1 souřadnici rychlosti kuličky o hmotnosti m_1 po srážce, u_2 souřadnici rychlosti krychličky o hmotnosti m_2 po srážce. Platí

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

Po dosazení za $m_2 = km_1$ a úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + k u_2, \\ v_1^2 &= u_1^2 + k u_2^2. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $u_1 = v_1 - k u_2$ a dosadíme do druhé. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$k^2 u_2^2 + k u_2^2 - 2k v_1 u_2 = 0,$$

z níž pro nás má význam pouze řešení $u_2 = \frac{2v_1}{1+k}$, potom $u_1 = \frac{1-k}{1+k} v_1$.

Pro dané hodnoty je $v_1 = 1,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $u_1 = -\frac{2}{3} v_1 = -0,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $u_2 = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 body

- b) Pro velikost rychlosti dopadu v_1 platí z úlohy a) vztah $v_1^2 = 2gl(1 - \cos \alpha)$, z čehož $\cos \alpha = 1 - \frac{v_1^2}{2gl}$. Analogicky po odrazu platí

$$\cos \beta = 1 - \frac{u_1^2}{2gl}.$$

Po dosazení za u_1 z části a) dostaneme

$$\cos \beta = 1 - \frac{(1-k)^2 v_1^2}{2gl(1+k)^2}.$$

Nakonec po dosazení za v_1^2 dostaneme po úpravě

$$\cos \beta = \frac{4k}{(1+k)^2} + \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \cos \alpha.$$

Pro dané hodnoty je $\cos \beta = 0,94$, z čehož $\beta = 20^\circ$.

4 body

- c) Krychlička o hmotnosti m_2 doletí do vodorovné vzdálenosti d od místa srážky. V tomto případě jde o vrh vodorovný a platí

$$d = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot u_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{2v_1}{1+k} = \frac{4}{1+k} \sqrt{Hl(1-\cos \alpha)}.$$

Pro dané hodnoty: $d = 0,15$ m.

2 body

- 3.a) Ze vztahu $m \frac{4\pi^2}{T^2} r = \kappa \frac{mM}{r^2}$ vyjádříme neznámou r (obr. R1), dostaneme $r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \kappa M}{4\pi^2}}$. Protože zároveň také $r = R_z + h$, můžeme oba vztahy pro r porovnat a vyjádřit h . Dostaneme

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \kappa M}{4\pi^2}} - R_z = 20\,200 \text{ km.}$$

3 body

- b) Vztah pro r z úlohy a) dosadíme do vztahu pro F_g a upravíme. Obdržíme

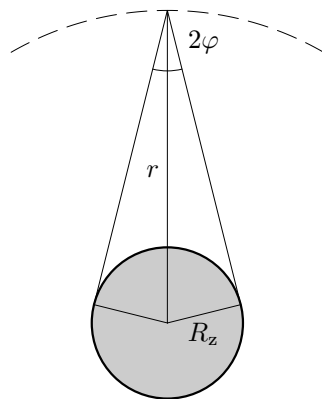
$$F_g = \kappa \frac{mM}{r^2} = \sqrt[3]{\frac{16\pi^4 \kappa M}{T^4}} m = 1020 \text{ N.}$$

Velikost rychlosti v pak určíme pomocí vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi \kappa M}{T}} = 3,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

- c) Dle obr. R1 můžeme psát



Obr. R1

$$\sin \varphi = \frac{R_z}{r},$$

Po dosazení za r z úlohy a) dostaneme

$$\sin \varphi = \frac{R_z}{\sqrt[3]{\frac{T^2 \kappa M}{4\pi^2}}},$$

z čehož $\varphi = 14^\circ$. Potom zorný úhel ze satelitu je $2\varphi = 28^\circ$. Největší vzdálenost bodů je $s = (\pi - 2\varphi) \cdot R_z$, kde je za úhel φ nutno v tomto případě dosadit v radiánech. Pro dané hodnoty je $s = 16\,900 \text{ km}$.

3 body

- 4.a) Stěna má plochu o obsahu $S_1 = (4 \cdot 2,8 - 0,6 \cdot 1,2) \text{ m}^2 = 10,48 \text{ m}^2$, obsah plochy okna je $S_2 = 0,6 \cdot 1,2 \text{ m}^2 = 0,72 \text{ m}^2$. Sledovaná doba $\tau = 24 \text{ hod} = 86\,400 \text{ s}$; teploty $t_1 = 22^\circ\text{C}$, $t_2 = -5^\circ\text{C}$.

Únik tepla stěnou:

$$Q_{1a} = Q_{\tau a} \cdot \tau = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha}} S_1 \tau = 34 \text{ MJ}.$$

Únik tepla oknem: $Q_{2a} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha}} S_2 \tau = 16 \text{ MJ}.$

Celkový únik tepla za den

$$Q_a = Q_{1a} + Q_{2a} = 50 \text{ MJ}.$$

Minimální výkon topení:

$$P_a = Q_{\tau a} = \frac{Q_a}{\tau} = 580 \text{ W}.$$

5 bodů

- b) Po zateplení.

Únik tepla stěnou:

$$Q_{1b} = Q_{\tau b} \cdot \tau = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha}} S_1 \tau = 28 \text{ MJ}.$$

Únik tepla oknem: $Q_{2b} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha}} S_2 \tau = 8 \text{ MJ}.$

Celkový únik tepla za den

$$Q_b = Q_{1b} + Q_{2b} = 36 \text{ MJ}.$$

Minimální výkon topení:

$$P_b = Q_{\tau b} = \frac{Q_b}{\tau} = 415 \text{ W}.$$

Dále vypočteme poměr:

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{415 \text{ W}}{580 \text{ W}} = 0,72.$$

Tepelné ztráty klesly o 28%.

5 bodů